Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de idiomas, artísticas y deportivas

Especialidad de Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

Semejanza y Teorema de Tales: una propuesta didáctica para 2º de ESO

Autor: Julio Enrique García Alonso

Directora: Eva Cid Castro

Julio de 2015

INDICE

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

El presente TFM pretende desarrollar una propuesta didáctica sobre el objeto matemático de semejanza geométrica.

El concepto de semejanza se introduce en el curso de 2º E.S.O, aunque de manera intuitiva los alumnos conocen el concepto de sus cursos de primaria.

Forma parte de los contenidos incluidos en el currículo aragonés de Educación Secundaria Obligatoria (Orden de 9 de mayo de 2007 del Departamento de Educación, Cultura y Deporte). En concreto en el bloque 4 de Geometría:

- *El triángulo. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Semejanza de triángulos: teorema de Thales. Criterios de semejanza de triángulos.*
- *Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de relaciones de semejanza. Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes. Homotecia.*

También está incluida en el recientemente aprobado currículo aragonés de Educación Secundaria Obligatoria (Orden de 15 de mayo de 2015, de la Consejería de Educación, Universidad, Cultura y Deporte), ahora en el Bloque 3 de Geometría:

- *Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes*

Como quiera que la implantación del currículo LOMCE en 2º curso de E.S.O no se producirá hasta el curso escolar 2016-17, tomaré como referencia en lo sucesivo el currículo LOE.

El **campo de problemas** sobre el que voy a desarrollar la unidad didáctica parte de la utilización y realización de mapas e incluye:

1. Interpretación y utilización de escalas.
2. Dibujo de figuras geométricas a escala.
3. Cálculo de escalas.

4. Identificación de figuras semejantes.
5. Aplicación de la semejanza de triángulos para el cálculo de distancias y alturas.
6. Aplicación del Teorema de Tales en el cálculo de distancias y alturas inaccesibles.
7. Construcción de figuras semejantes

Las **técnicas** a emplear serán:

1. Calculo de la razón de semejanza o escala en un plano mediante proporción entre segmentos homólogos.
2. Calcular distancias reales a partir de una escala, se explica mediante tres técnicas:
   1.1. Establecer una proporcionalidad directa entre segmentos.
   1.2. Multiplicar o dividir la distancia por el denominador de la escala o razón de semejanza.
   1.3. Plantear una regla de tres.
3. Calcular distancias en un plano a partir de una escala.
4. Dibujar, con regla y compás o transportador, un triángulo conocidos los tres lados, o conocidos dos lados y el ángulo comprendido o conocidos un lado y los angulos contiguos.
5. Identificar relaciones de semejanza en figuras planas.
6. Identificar relaciones de semejanza en triángulos.
7. Calcular la razón de semejanza entre dos figuras planas calculando el cociente entre lados homólogos.
8. Razón de semejanza de las áreas.
9. Aplicaciones prácticas del Teorema de Tales para cálculo de alturas y distancias inaccesibles.

En cuanto a **las tecnologías**, se definirán los siguientes conceptos:

1. Definición de escala
2. Definición de semejanza en de figuras planas
3. Casos de semejanza de triángulos
4. Teorema de Tales
5. Homotecia

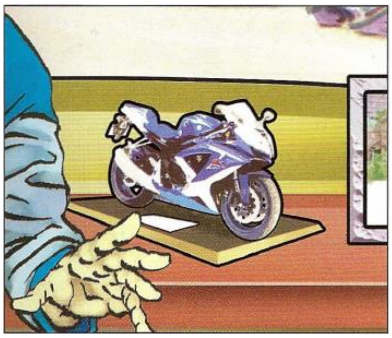
B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

El análisis sobre el estado de la enseñanza de la semejanza lo haremos a partir de dos libros de texto: MATEMATICAS 2 de la editorial ANAYA y MATEMÁTICAS 2 ESO de la editorial SANTILLANA.

En el primer texto, el tema de la semejanza se trabaja dentro de la UD 8 titulada: *Teorema de Pitágoras. Semejanza.* Con esta UD comienza el bloque destinado a Geometría, que seguirá en la UD 9 con los cuerpos geométricos y en la UD 10 con la medida del volumen.

En la primera página se muestran varias actividades referidas a escalas, planos y maquetas con la pretensión de que justifiquen los objetos geométricos que se introducen a continuación. Estas actividades quedan de momento sin resolver. En la página siguiente se repasan los elementos de un triángulo y las áreas de las figuras planas. A continuación se introduce el teorema de Pitágoras y sus aplicaciones (4 páginas).

La parte de semejanza arranca con un objeto real, una moto, y su maqueta, explicando que son figuras semejantes porque tienen la misma forma, pero distinto tamaño.



Después se introduce la razón de semejanza como la relación que existe entre las medidas de la maqueta y las del objeto real. De ahí se pasa a una definición que parece más importante y general:

Dos **figuras** distintas son **semejantes** cuando solo difieren en su tamaño. En tal caso, los segmentos correspondientes son proporcionales. Es decir, cada longitud en una de ellas se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo, llamado **razón de semejanza.**

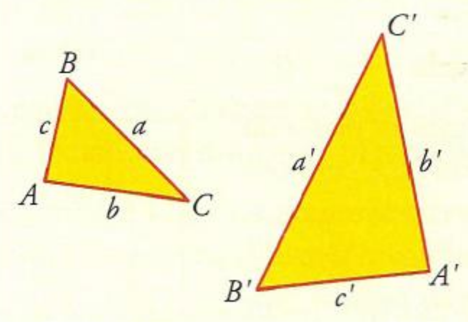
donde sobre la base de la misma explicación se añade el concepto de segmentos proporcionales. Pero ¿qué segmentos?, ¿no hablábamos de una moto?, ¿qué significa que los segmentos son proporcionales? Aparentemente, se pretende dar una definición formal pero, en realidad, seguimos basándonos en la intuición y la definición carece de rigor formal.

Después se presentan distintos ejercicios, unos resueltos y otros por resolver, en los que, partiendo de las longitudes de un objeto y su maqueta, debe encontrarse la razón de semejanza, o bien, conocida la razón de semejanza, deben encontrarse unas longitudes a partir de otras (2 páginas).

La unidad continúa con dos páginas dedicadas al concepto de escala en mapas y planos. Se sigue hablando de la semejanza en términos de figuras de la misma forma.

Se pasa directamente al análisis de la semejanza de triángulos y se da una definición.

Lo mismo que los demás polígonos, dos triángulos semejantes tienen sus ángulos respectivamente iguales y sus lados proporcionales:

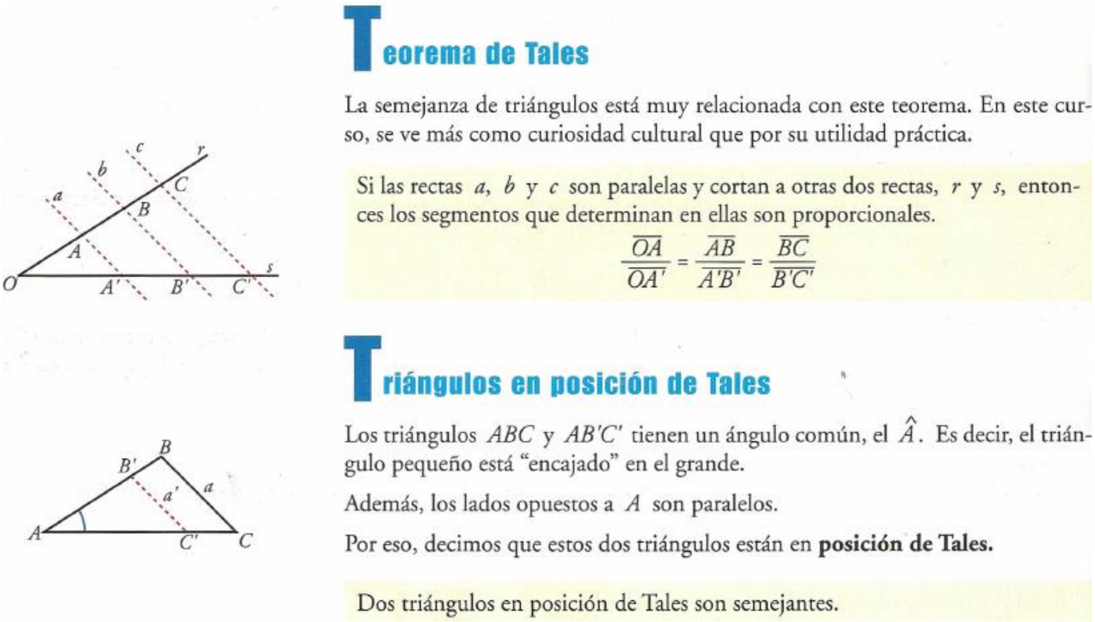


Los **triángulos** ABC y $A'B'C'$ son **semejantes** si:

- $\hat{A} = \hat{A}'$, $\hat{B} = \hat{B}'$, $\hat{C} = \hat{C}'$
- $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$

De manera casi inadvertida se da la definición de semejanza para un polígono cualquiera, ***“Lo mismo que los demás polígonos,…”***

Se enuncia el teorema de Tales y se dice lo que son dos triángulos en posición de Tales.



Teorema de Tales

La semejanza de triángulos está muy relacionada con este teorema. En este curso, se ve más como curiosidad cultural que por su utilidad práctica.

Si las rectas a, b y c son paralelas y cortan a otras dos rectas, r y s, entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

Triángulos en posición de Tales

Los triángulos ABC y $AB'C'$ tienen un ángulo común, el $\hat{A}$. Es decir, el triángulo pequeño está "encajado" en el grande.

Además, los lados opuestos a A son paralelos.

Por eso, decimos que estos dos triángulos están en **posición de Tales.**

Dos triángulos en posición de Tales son semejantes.

El propio texto advierte a los estudiantes y sitúa al Teorema como ***"…curiosidad cultural…".*** Suficiente para que los alumnos se olviden de volver a prestar atención a este Teorema.

A continuación, se desarrollan los casos de semejanza de triángulos para el caso particular de triángulos rectángulos: son semejantes si uno de los ángulos agudos es igual, si sus catetos son proporcionales o un cateto y la hipotenusa proporcional. Después se explica un procedimiento para calcular la altura de un objeto a partir de su sombra o proyectando una visual y se termina con un método para dibuja figuras semejantes por proyección, presentando el concepto de homotecia.

El campo de problemas que se presenta en el libro consiste en aplicaciones directas de la definición de escala, cálculo de lados y razones de semejanza sobre triángulos y aplicaciones prácticas de la semejanza para medir alturas de elementos por medio de la visual. En este último tipo, se añaden croquis muy simples con lo que el problema se reduce a los anteriores.

El libro sigue la metodología tradicional, presentando inicialmente el objeto matemático, desarrollando las técnicas asociadas al objeto y finalizando con la aplicación de esas técnicas a problemas o ejercicios.

En cuanto al segundo libro, el tema se desarrolla en la UD 9 titulada *Proporcionalidad geométrica* que va precedida de una UD que habla de la proporcionalidad numérica. El tema comienza con una historieta sobre la utilización de mapas que pretende justificar el interés de los objetos matemáticos que se presentan, pero que no juega ningún papel en el resto de la UD.

Este libro es más clásico que el de la Editorial Anaya y también más matemático.

El libro dedica 10 páginas al tema y todas mantienen el mismo esquema. Se presenta un objeto matemático a través de su definición, a continuación se presentan uno o dos ejemplos resueltos y posteriormente en cada página se plantean 3 o 4 ejercicios para resolver.

En la primera página se comienza con las definiciones de recta, semirrecta y segmento y la razón entre segmentos:

Una **recta** es una línea continua formada por infinitos puntos que no tiene ni principio ni final.

Una **semirrecta** es una recta que tiene principio pero no tiene final.

Un **segmento** es la porción o parte de una recta delimitada por dos puntos (**extremos**).

Llamamos **razón de dos segmentos**, *AB* y *CD*, al número que resulta de dividir la longitud del segmento *AB* entre la longitud del segmento *CD*.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = r \longleftarrow \text{Razón}$$

Continúa en la siguiente página definiendo la proporcionalidad entre segmentos:

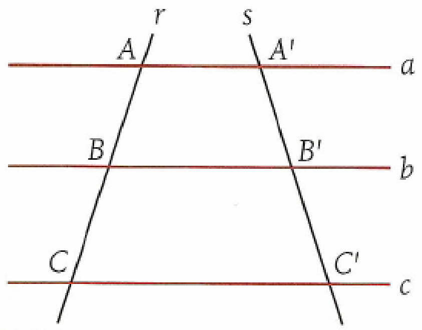
Los **segmentos** *AB* y *CD* son **proporcionales** a *EF* y *GH*, si la razón de *AB* y *CD* es igual a la razón de *EF* y *GH*.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{GH}} = r$$

En los ejercicios propuestos se practican las definiciones anteriores.

Posteriormente dedica dos páginas al Teorema de Tales, en la primera se define el objeto y en la siguiente página se presentan unas aplicaciones prácticas, dividir un segmento en partes iguales y dividir un segmento en unas proporciones concretas.

Si tres rectas paralelas, a, b y c, cortan a otras dos rectas, r y s, los segmentos que determinan son proporcionales.



$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \\[2ex] \dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}\end{array}\right\} \rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

Esta igualdad constituye el **teorema de Tales**.

El libro pasa directamente a definir la semejanza entre triángulos de la siguiente manera:

Dos **triángulos** $\widehat{ABC}$ y $\widehat{A'B'C'}$ son **semejantes** si:

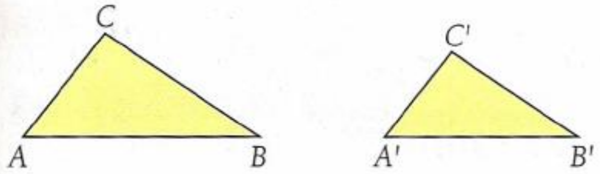
– Tienen sus ángulos iguales. $\hat{A} = \hat{A}'$ $\quad \hat{B} = \hat{B}'$ $\quad \hat{C} = \hat{C}'$

– Tienen sus lados proporcionales. $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$

Define también los triángulos en posición de Tales indicando que dos triángulos en posición de tales siempre son semejantes.

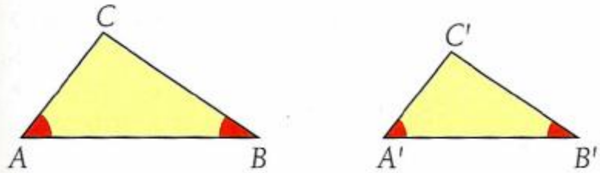
En la siguiente página establece los casos de semejanza de triángulos como condiciones mínimas que deben cumplir los triángulos para ser semejantes:

PRIMER CRITERIO. Dos triángulos son semejantes si tienen sus lados proporcionales.



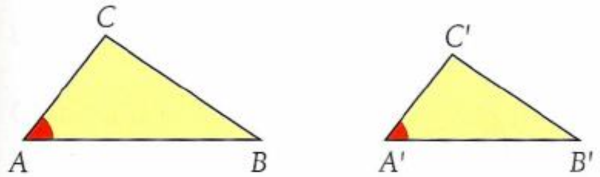
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

SEGUNDO CRITERIO. Dos triángulos son semejantes si dos ángulos son iguales.



$$\widehat{A} = \widehat{A}'$$
$$\widehat{B} = \widehat{B}'$$

TERCER CRITERIO. Dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que lo forman son proporcionales.



$$\widehat{A} = \widehat{A}'$$
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}$$

Presenta unos ejemplos de aplicaciones de la semejanza de triángulos para calcular alturas de objetos inaccesibles a través de su sombra y proyectando una visual.

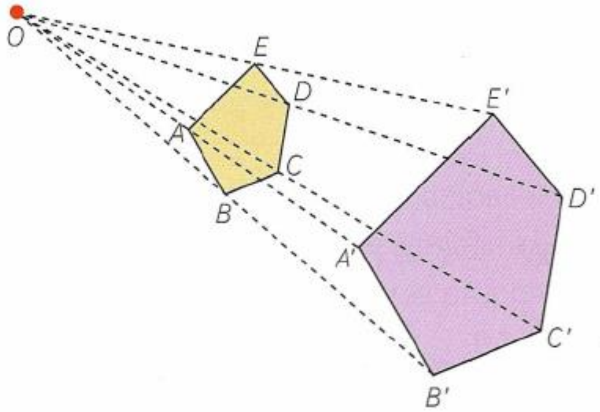
En la siguiente página defina la semejanza entre polígonos y la razón de semejanza:

Dos **polígonos** son **semejantes** cuando tienen sus ángulos iguales y sus lados correspondientes son proporcionales.
Se llama **razón de semejanza** al cociente de la longitud de un lado de un polígono entre la longitud correspondiente del otro polígono.

Me resulta curioso como el libro comienza hablando de razón entre segmentos, pero sin embargo evita hablar de razón de semejanza cuando se refiere a triángulos, incidiendo en la proporcionalidad de lados, para después volver a presentar el objeto al generalizar a los polígonos. Parece como si la razón de semejanza no tuviera sentido en los triángulos.

En la siguiente página, a través de unos ejemplos, presenta un método para dibujar polígonos semejantes sin mencionar el concepto de homotecia:

14 **Construye un polígono semejante a este, con razón de semejanza 2.**



Desde un punto cualquiera, O, trazamos rectas hasta todos los vértices del polígono.

En cada una esas rectas marcamos los puntos A', B', C', D' y E', de forma que:

$\overline{OA'} = 2 \cdot \overline{OA}$ $\quad \overline{OB'} = 2 \cdot \overline{OB}$

$\overline{OC'} = 2 \cdot \overline{OC}$ $\quad \overline{OD'} = 2 \cdot \overline{OD}$…

El polígono es semejante al polígono *ABCDE*, con razón de semejanza 2.

El tema termina presentando los planos y definiendo el concepto de escala como una aplicación del concepto de semejanza:

Se llama **escala** a la razón de semejanza entre la figura representada y la figura original.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Distancia en la representación}}{\text{Distancia en la realidad}}$$

Posteriormente el libro presenta una extensa colección de ejercicios y problemas (95 en total) que se suman a los que ya se plantean en cada página. En estos se trabajan todos los objetos matemáticos vistos en la UD.

Respecto al efecto sobre el alumno, analizando estos dos textos, mantengo el preconcepto que ya tenía sobre el tema.

Probablemente la Geometría es una de las partes de la matemática más fácil de llevar a la vida real y de contextualizar su importancia y, sin embargo, se trata como dos mundos paralelos. No hay gran conexión entre las partes del libro donde se habla de mapas, figuras y situaciones reales y las partes en la que se definen los conceptos en figuras planas (triángulos y polígonos).

En el libro de Anaya el concepto de semejanza se define con exactitud cuando se habla de un triángulo o de un polígono, pero se habla de forma más vaga cuando se contextualiza el problema. Supongo que esto induce a pensar a los alumnos que la geometría es algo que trata de triángulos, pentágonos y figuras que realmente no existen en el mundo real, ni se entiende muy bien por qué es tan importante estudiar sus propiedades más allá de su aplicación en un entorno de matemáticas.

El planteamiento del libro de Santillana me parece más formal pero tal vez más comprensible y fácil de seguir para un alumno. Las definiciones y los ejemplos están claros y en un orden adecuado a la metodología que propone el libro. No se entiende a qué responde la extensa colección de ejercicios y problemas presentada en el libro ya que es inviable su realización en clase e incluso su realización en casa y posterior corrección en clase.

En los dos textos las aplicaciones se reducen a un ejemplo muy concreto: la medición de alturas inaccesibles

En cuanto a las dificultades de aprendizaje de la semejanza que se han detectado en los escolares, Gualdrón (2006) en un estudio realizado con estudiantes colombianos de 14-15 años, indica las siguientes:

- No se reconoce la semejanza de figuras cuando las medidas de los lados de una, no son múltiplos enteros de las medidas de la otra figura. Algunos estudiantes, si se les pedía ampliar o reducir una figura solo concebían duplicar o reducir a la mitad sus longitudes.
- En algunas tareas los estudiantes evitan multiplicar por una fracción y tienden a hacer una construcción progresiva de la respuesta a través de razones sucesivas. Por ejemplo, para encontrar el número que está en la razón 2:3 con 60, pasan por sucesivas razones (6:4, 9:6, 12:8) hasta llegar a la que buscan.
- Cuando se dibuja una figura semejante, lo cual implica dibujar otra más grande o más pequeña, con frecuencia no se guarda la razón entre sus lados. Por ejemplo, amplían un rectángulo dibujando otro rectángulo que tenga uno de sus lados más largo, sin preocuparse de aumentar en la misma proporción el otro lado.
- Se utiliza una relación de tipo aditivo para la ampliación. Por ejemplo, si hay que ampliar un rectángulo de lados 5 cm y 3 cm, sabiendo que el lado mayor hay que aumentarlo a 12 cm, suman 7 a la medida de cada lado.

Tuve la oportunidad de desarrollar parte de esta unidad didáctica durante mi periodo de Practicum II y III y de observar alguna de estas dificultades mencionadas y otras que paso a relacionar:

- Identificar erróneamente polígonos semejantes comprobando solo alguna de las condiciones.
- Intentar generalizar los casos de semejanza en triángulos a otras figuras.
- Demasiada dependencia del uso de fórmulas. Por ejemplo, en este sentido se intenta aplicar el Teorema de Pitágoras en problemas de semejanza.
- Solo se reconoce el Teorema de Tales en triángulos en posición de Tales.
- Problemas con las escalas y las unidades de medida.
- Confusión con el significado del término 'semejante' ya que en un contexto cotidiano 'semejante' significa 'parecido'.
- Muchos problemas con las representaciones gráficas, sobre todo si nos encontramos con figuras fuera de su posición habitual. En este sentido, un triángulo rectángulo con la hipotenusa horizontal les confunde y no lo reconocen.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

El alumno necesita tener los conocimientos de geometría que se dan en 1º de ESO. En el currículo de BOA nos encontramos como contenidos los siguientes:

Bloque 4. Geometría

- **Elementos básicos de la geometría del plano.** Punto, recta y segmento. **Posición relativa de rectas: incidencia y paralelismo. Ángulos: propiedades. Medida de ángulos: operaciones. La perpendicularidad**.
- **Análisis de relaciones y propiedades de figuras en el plano: paralelismo y perpendicularidad.** Empleo de métodos inductivos y deductivos para analizar relaciones y propiedades en el plano. **Construcciones geométricas sencillas: mediatriz, bisectriz.**
- **El triángulo. Descripción, elementos, construcción, clasificación y propiedades. Perímetro y área: concepto y cálculo.**
- **Polígonos: descripción, elementos, construcción, clasificación y propiedades. Perímetro y área: concepto y cálculo.**

- Circunferencia y círculo. Descripción, elementos, construcción y propiedades. Arco de circunferencia. Angulo inscrito y ángulo central: relaciones. Sector y segmento circular. Cálculo de longitudes y áreas.
- **Construcción de bisectrices y mediatrices con los instrumentos de dibujo habituales**.
- **Realización de clasificaciones de figuras geométricas planas atendiendo a diferentes características.**
- **Estimación y cálculo de áreas mediante fórmulas, triangulación y cuadriculación. Uso de la composición y descomposición de figuras planas en otras para facilitar la resolución de problemas.**
- **Simetría de figuras planas. Apreciación de la simetría en la naturaleza y en las construcciones.**
- Empleo de herramientas informáticas para construir, simular e investigar relaciones entre elementos geométricos.
- Utilización de la terminología y notación adecuadas para describir con precisión situaciones, formas, propiedades y configuraciones del mundo físico.
- Elaboración de definiciones de objetos geométricos en un proceso de depuración de la descripción de sus características.
- Utilización de métodos inductivos para formular conjeturas sobre propiedades geométricas.
- Uso de razonamientos deductivos para validar alguna afirmación o propiedad geométrica sencilla

He marcado en negrita las que considero más necesarias y objeto de repaso por parte de los alumnos.

Esto en lo que respecta a geometría. Es importante también en este tema el concepto de proporcionalidad aritmética y las operaciones con fracciones.

Todos los contenidos necesarios se han visto con anterioridad en este nivel o en anteriores, con lo que entiendo que es suficiente de cara a un correcto seguimiento de esta unidad didáctica por parte del alumno.

En 2º de E.S.O. antes de este tema los alumnos han trabajado el Teorema de Pitágoras y cálculo de distancias y áreas en polígonos, lo que les ha podido servir como repaso, pero también les orienta hacia un tipo de solución en los problemas geométricos. En general cuando se trata de calcular distancias, prefieren aplicar el Teorema de Pitágoras a criterios de semejanza.

A continuación se establecen una serie de ejercicios que deben servir como repaso al alumno de los conceptos que deben de tener para afrontar este tema y le da al profesor de una idea del nivel de conocimientos de los alumnos.

Actividades de repaso

1. Identificación y medida de ángulos

Dibuja:

a) Dos ángulos consecutivos de 30º y 45º respectivamente

b) Dos ángulos adyacentes de 120º y 60º respectivamente.

c) El ángulo complementario de 38º.

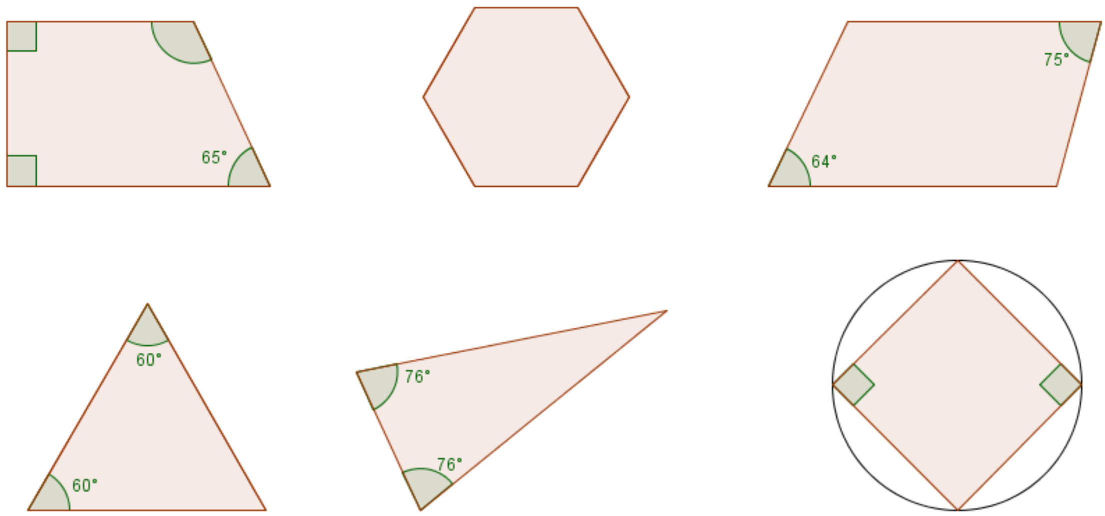
d) El ángulo suplementario de 50º.

e) Dos ángulos alternos internos

f) Dos ángulos opuestos por el vértice

2. Identificación de polígonos

Identifica los siguientes polígonos y calcula el valor de los ángulos internos



3. Dibujo de un triángulo con regla y compás

Dibuja con regla y compas los triángulos cuyos lados miden 4, 7 y 6 cm y 4, 12 y 11 cm.

4. Propiedades en polígonos regulares

Dibuja los polígonos regulares que cumplan las siguientes condiciones:

a) Tiene sus diagonales iguales y perpendiculares

b) Todos sus lados forman ángulos de 120º

c) Tiene tres lados iguales

d) Tiene todos sus lados iguales y diez diagonales

He preparado estas actividades de repaso para atender a alguna de las dificultades observadas en los alumnos durante el periodo de Practicum II y III, en concreto referidas a la identificación de ángulos y de propiedades simples en polígonos. Añado como recordatorio la del dibujo de un triángulo ya que la necesitaremos posteriormente.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

La razón de ser de la semejanza está centrada en la necesidad de representar la realidad a través de mapas y planos y en el uso de escalas.

La representación en planos y el uso de escalas permite dar sentido al concepto de semejanza. En ocasiones los alumnos perciben los objetos matemáticos como situaciones más o menos caprichosas y artificiales. En los planos las nociones de distancia y ángulos cobran sentido y conectan la matemática con la realidad.

El concepto de proporción puede llegar a ser confuso par los alumnos de este nivel. Pretendo un primer acercamiento a través del uso de escalas. Es algo con lo que de alguna manera los alumnos han trabajado, es relativamente frecuente que alguno de ellos, en actividades extraescolares, haya realizado pequeños ejercicios de orientación midiendo distancias en un plano o incluso utilizando ángulos.

Cuando ven un plano entienden sin mayor problema que representa una realidad, normalmente de mayor tamaño. Es necesario establecer además qué otras relaciones se necesitan para poder hablar de semejanza.

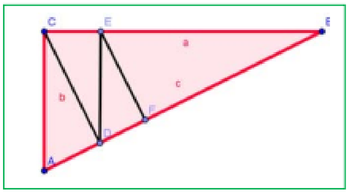
A continuación pasamos del plano al trabajo con imágenes y posteriormente con figuras planas para terminar presentando el Teorema de Tales y el concepto de Homotecia.

Examinando la historia de las Matemáticas nos encontramos generalmente con que muchos de los objetos matemáticos tienen su origen en la práctica ligada a problemas del mundo real pasando después a ser analizados desde el punto de vista de la ciencia.

Se muestran también la evolución que ha tenido cada objeto matemático, siendo este aspecto muy importante en la práctica docente a la hora de poder orientar la enseñanza.

El origen histórico, según Boyer (1999, citado en Millan 2011) nos obliga a retroceder al periodo 1900-1600 a.C., en el Imperio Babilónico y Mesopotamia. Entre sus avances más importantes en geometría nos encontramos con la semejanza de triángulos, conocían sus propiedades y las aplicaban según se pone de manifiesto en numerosas tablillas encontradas. En la imagen siguiente (LibrosMareaVerde.tk) se utiliza una figura encontrada en la tablilla de Tell Harmal que se encuentra en el museo de Bagdag.

17. En el museo de Bagdad se conserva una tablilla en la que aparece dibujado un triángulo rectángulo *ABC*, de lados *a* = 60, *b* = 45 y *c*= 75, subdividido en 4 triángulos rectángulos menores *ACD*, *CDE*, *DEF* y *EFB*, y el escriba calcula la longitud del lado *AD* como 27. ¿Ha utilizado la semejanza de triángulos? ¿Cómo se podría calcular? ¿Qué datos necesitas? Calcula el área del triángulo *ABC* y del triángulo *ACD*. Determina la longitud de los segmentos *CD*, *DE* y *EF*.



También la civilización egipcia desarrollo grandes avances en geometría. En uno de los Papiros encontrados, el Papiro Rhind, aparecen una serie de problemas resueltos y entre otros alguno donde se presentan rudimentos de trigonometría y semejanza de triángulos.

Según Escudero (2005) se pueden distinguir tres grandes periodos en el estudio de la semejanza y Homotecia:

a) *El griego. La primera demostración del teorema de Thales y algunos teoremas relativos a figuras semejantes se encuentra en los Elementos, de Euclides (s. iv a.C.). Hay que destacar de este periodo y, en general, en el periodo de la influencia de la geometría de Euclides, que las transformaciones no existen como tales.*
b) *Del siglo xvi al xviii. Los problemas de la representación del espacio que surgen en el Renacimiento van a ser el germen para el estudio de las transformaciones. Durante estos siglos, se van a ir desarrollando lentamente, sin que se pueda identificar aún una etapa de utilización consciente y de conceptualización de las mismas. De este periodo, se resalta la consideración de una transformación como un útil en la resolución de problemas.*
c) *Siglos xix y xx. Periodo de la estructuración y algebrización de la geometría. En el siglo xix se produce la consideración de la homotecia y de la semejanza como objetos matemáticos, debido en gran parte al desarrollo que experimenta la geometría, entre las fechas de publicación de la geometría descriptiva de Monge (año 1799) y el Programa Erlangen de Felix Klein (año 1872) y a la evolución del campo numérico.*

Es en el segundo periodo que menciona Escudero donde voy a centrar la razón de ser de este trabajo.

El uso de una *escala* aparece en la carta náutica más antigua que se conoce, la "Carta Pisana". Cuenta con una escala bidireccional subdividida en varios segmentos que corresponden a 200, 50, 10, y 5 millas. En los mapas a partir del s. XIII, la escala aparece con el término de "tronco de leguas" y se representaba en forma gráfica con la intención de expresar en leguas las distancias entre los distintos puertos.

En este momento el concepto de semejanza alcanzado es el que actualmente tratamos, y en cierto sentido no se aleja mucho de lo que se enseña, sobre todo en los primeros niveles.

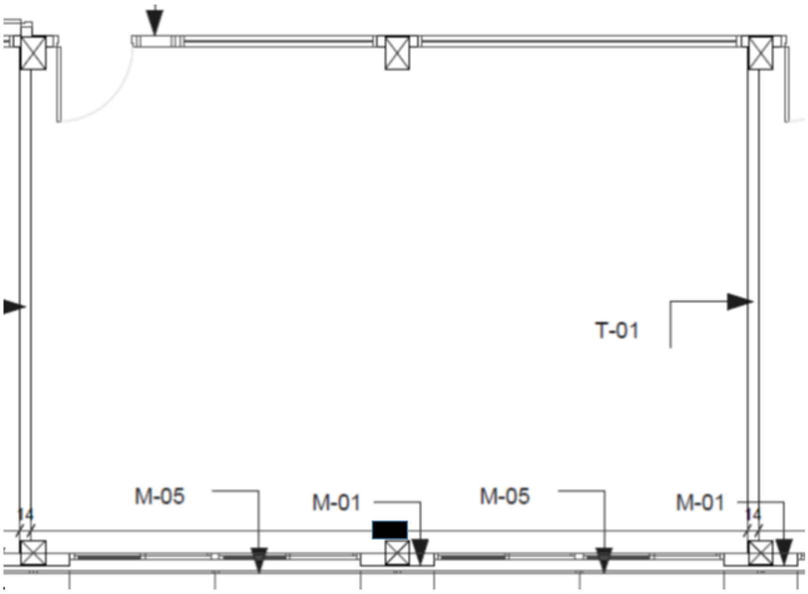
Me interesa lo que Lemonidis (1991, citado en Escudero (2005)) señala como "transformación *geométrica vista como útil*" cuando identifica tres momentos distintos en el concepto de semejanza desde los que, que pueden determinar tres aproximaciones a ella:

a) ***Relación intrafigural****. Se destaca la correspondencia entre elementos de una figura y los correspondientes de su semejante, estando ausente la idea de transformar una figura en otra.*
b) ***Transformación geométrica vista como útil****. La transformación geométrica se percibe como una aplicación del conjunto de los puntos del plano en él mismo. Se utiliza la semejanza como un útil en la resolución de problemas gráficos.*
c) ***Transformación geométrica como objeto matemático****. Caracterizada porque hay un tratamiento en el que se busca la transformación resultante de dos o más transformaciones.*

La razón de ser que he diseñado para introducir el tema en clase se basa en la necesidad social de construir y utilizar mapas y planos y se compone de los siguientes problemas:

Problema 1

Se entrega a los alumnos una hoja con el plano de su clase sin ningún tipo de medidas:



Hay que llevar a clase una o varias cintas métricas y se plantean dos tareas:

1. Dibuja en el plano la mesa del profesor en su posición correcta.
2. ¿A qué escala está dibujado este plano?

Problema 2.

Les muestro a través del proyector la siguiente imagen:

A continuación reparto a la mitad de la clase una hoja tamaño A4 en blanco y a la otra mitad una cuartilla de color amarillo.

Les pido que dibujen a escala las figuras geométricas que tienen en la imagen de manera que les quepa en su papel. Los alumnos deben decidir la escala que van a utilizar.

En cuanto a la metodología a utilizar, en el problema 1 se puede optar por separar a los chicos por grupos y ponerlos a todos a medir o sacar a un grupo que haga las medidas y vaya comunicando los resultados de las medidas. En este caso el resto del grupo decide qué medidas toman, desde dónde y cómo. El profesor supervisa la tarea.

El objetivo que se busca es que para poder dibujar la mesa los alumnos entiendan la necesidad de que el dibujo guarde una serie de proporciones con la realidad, lo que les deberá llevar a medir distancias reales en la clase y compararlas con las del plano

La idea es que surjan preguntas para ir contestando sobre el tema de escalas.

Se puede aprovechar la oportunidad para hablar de los errores cometidos en las medidas. Normalmente los chicos resuelven ejercicios en los que los datos y las soluciones son valores sencillos y por supuesto exactos, o como mucho con algún decimal. Plantearles que en matemáticas también tiene cabida la incertidumbre en los datos me parece oportuno.

Se aprovecha el problema para explicar:

- ✓ En qué consiste una escala.
- ✓ Cómo se representa.
- ✓ Cómo se utiliza. Hay que destacar la idea de proporcionalidad.

Problema 2

Me interesa que vean figuras geométricas dentro de un mapa. Que vean que hay ángulos y como les afecta la escala.

En general cuando los alumnos trabajan con escalas lo hacen solamente calculando distancias entre puntos en el plano o dibujando a escala distancias reales entre puntos. No suelen aparecer figuras geométricas asociadas a este tipo de problemas. Planteo el ejercicio conectando estas dos situaciones.

Hacemos de manera conjunta una reflexión sobre cuál será la escala más apropiada a elegir y cómo conviene elegirla en función del tamaño del papel donde tienen que hacer el dibujo. La idea es tener dibujos de distintos tamaños y color para poder recortar y superponer posteriormente y que esto sea visible en la clase para que vean que a pesar de los tamaños hay elementos que no varían en las figuras como son los ángulos.

Respecto de la elección de la escala venimos de la actividad anterior donde de forma deliberada la escala que tuvieron que calcular no es una razón de enteros. Este hecho espero que les genere alguna incertidumbre. Están muy acostumbrados a que todos los resultados de los ejercicios que realizan sean números enteros sencillos. Planteo con esto la semejanza y las escalas como una herramienta para representar la realidad de un modo útil, en el que el sujeto toma decisiones y hay que saber en base a que debemos tomarlas.

La idea es que después de la presentación ya no reciben más ayuda por mi parte. Una vez elegida la escala, dibujarán sin problemas el triángulo amarillo. Para dibujar las líneas de color verde que completan la figura les faltan datos.

El resultado esperado es que lo dibujen de todas maneras cada uno planteando una estrategia. Una vez con los dibujos podemos probar a recortar y ver si “encajan”. Es de esperar que los triángulos amarillos, salvo errores lógicos de dibujo sean semejantes y se pueda ver en clase el resultado y la coincidencia de ángulos.

La figura resultante que queda presentará más problemas. Ya no serán semejantes unas a otras y podremos analizar que sucede, porque ha ocurridos esto. ¿Qué se necesita para determinar que dos figuras son semejantes? ¿Basta con la proporcionalidad?

El alumno debe empezar a ser consciente de lo que significa la escala o razón de semejanza. El análisis de varios dibujos debe sacar a la luz el hecho de que distintos alumnos elijan distintas escalas, pudiendo discutir acerca de cuáles son las más convenientes o útiles.

Se debe continuar analizando las similitudes entre realidad y dibujo para poder poner de manifiesto que propiedades se conservan y cuáles no.

Para poder resolver estas situaciones el alumno se va a apoyar fundamentalmente en la semejanza de figuras planas y triángulos, entendiendo su importancia dentro de la geometría y en las aplicaciones prácticas de la misma.

E. Sobre el campo de problemas, las técnicas y las tecnologías

A continuación se detallan los distintos tipos del campo de problemas desarrollados en la propuesta didáctica

1. Calculo de distancias o dimensiones reales midiendo en un plano

Problema 3

Utiliza este plano de Zaragoza a escala 1:20000, dibuja el trayecto desde tu casa al instituto y averigua la distancia real que recorres. Intenta diseñar un camino alternativo más corto.

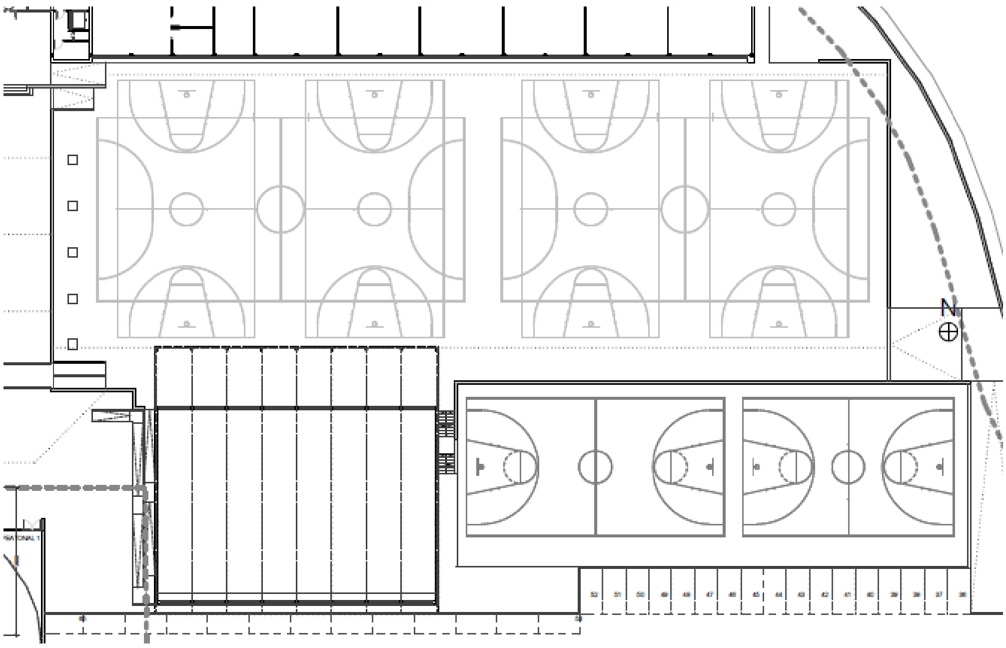
Problema 4

Utiliza el siguiente plano a escala 1:250 de tu instituto y responde a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuánto miden las canchas de futbol sala?

b) ¿Cuánto se podrían ampliar manteniendo su forma actual?

c) ¿Se puede crear una pista para correr 100 metros lisos?



Podemos desarrollar este tipo de actividades preparando el material en soporte papel o trabajando con planos interactivos en el ordenador. Creo que en este caso es más apropiado el uso de papel. Se trata de un problema simple donde la semejanza se plasma en que los alumnos identifican la imagen del plano con la realidad y en este caso la posibilidad del zoom de los dispositivos electrónicos no nos interesa.

Se puede aprovechar para que los alumnos extraigan más datos de las poligonales que han trazado (en el problema 3), pidiéndoles que de manera directa midan los ángulos o solicitando (en el problema 4) que identifiquen en el plano de las canchas deportivas del instituto determinadas figuras geométricas.

Las técnicas asociadas a este tipo de problemas son:

1. Aplicar la escala de un plano para calcular distancias reales.
2. Identificar esa escala como razón de semejanza entre segmentos.

La tecnología asociada a este tipo de problemas es:

1. Definición de escala como la razón existente entre las dimensiones reales de un objeto y las dimensiones de su representación en el plano.
2. Distintas formas de denotar la escala.

2. Modificar la escala de un plano: ampliaciones y reducciones

Problema 5

Estamos viendo un plano en la pantalla del ordenador y lo ampliamos con el zoom al 120%, ¿Qué significa eso?, ¿la escala del plano sigue siendo la misma?

Problema 6

¿Cuánto tienes que reducir el plano del **Problema 1** para poder verlo en la pantalla de tu móvil? Exprésalo con porcentajes ¿A qué escala estará?

Problema 7

Quieres proyectar el plano del **Problema 3** en la pantalla de clase:

a) ¿Cuánto necesitas ampliarlo?

b) ¿Cuál será la escala del plano proyectado?

Partimos de la representación en un plano y la modificamos. Durante el Practicum pude comprobar como en esta situación los alumnos en ocasiones perciben las escalas como datos que existen sin más, algo así como los datos de los problemas a los que están acostumbrados. Se pretende que tomen decisiones, algo muy difícil en este nivel. Que entiendan que las escalas y el hecho de querer representar algo en un plano es una situación artificial creada por el hombre sobre la que pueden actuar una vez conocido su significado y su esencia. Los alumnos de momento no se fijan en los ángulos ni en las condiciones que determinan la semejanza entre figuras, los planos siempre son elementos semejantes "por definición", alguien los hace y "ya está". Vamos introduciendo el concepto de semejanza con la variación de dimensiones del mismo plano.

Como técnicas asociadas:

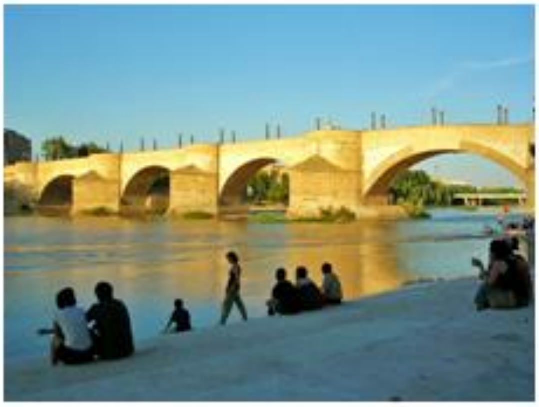
1. Establecer la relación de proporción entre dimensiones.

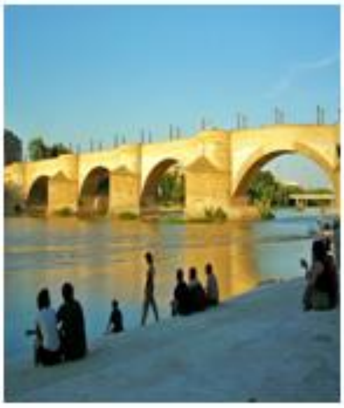
La tecnología asociada sigue siendo la misma.

3. Identificar condiciones de semejanza en figuras planas

Problema 8

Identifica las figuras semejantes



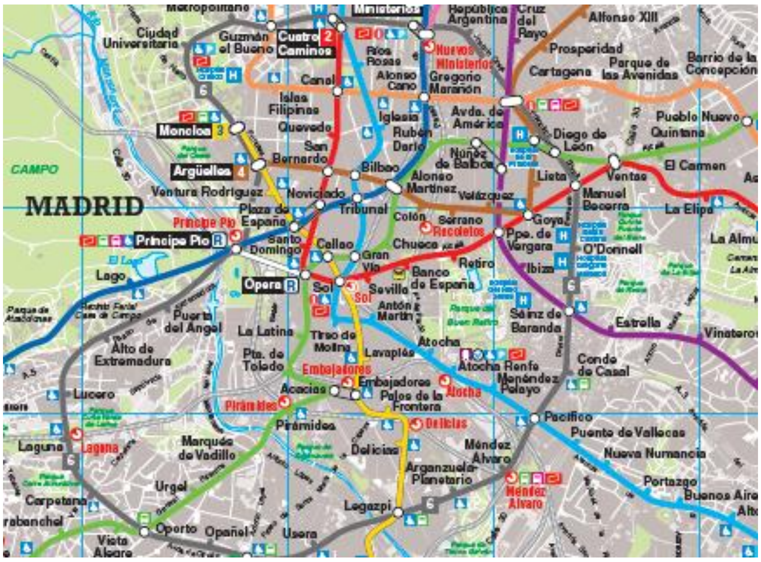


Damos un salto y pasamos de la escala a la comparación de imágenes. Aquí se trata de que los alumnos desarrollen las mismas técnicas que utilizaban para representar la realidad en el plano pero para comparar la misma realidad. Alguna de las fotos está deformada horizontal o verticalmente para comenzar a introducir las condiciones de semejanza. No se trata solo de la misma figura y distinto tamaño (en este caso El Pilar y el Puente de Piedra) sino que se deben de cumplir una serie de condiciones que el alumno deberá poder identificar. En un principio podrán hacerlo de manera intuitiva tratando de ver las deformaciones que se producen de una figura a otra para más adelante pedirles que tomen medidas con la regla y comprueben la veracidad de las suposiciones que han establecido por intuición.

Problema 9

¿Cuál de estas dos imágenes es semejante con la realidad?

Necesitas orientar a una persona para ir a una dirección concreta de Madrid, que tipo de instrucciones te permite dar cada plano para poder ayudarle.



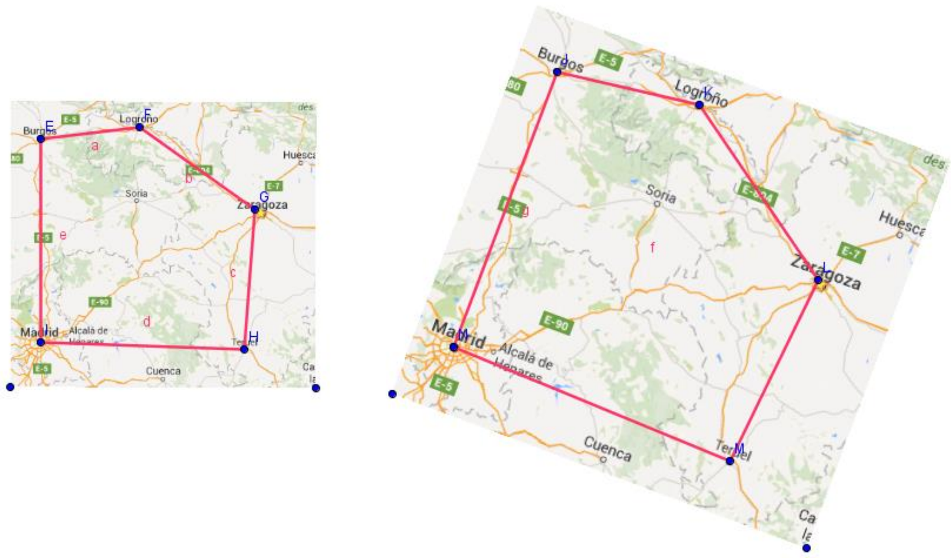
Se trata con este ejercicio de reforzar el concepto de semejanza. De manera intuitiva les ayuda a ver que la relación de semejanza les permite identificar de manera clara las dimensiones de las figuras y sus ángulos pudiendo reproducir una a partir da la otra conocida la razón de semejanza. Se les va a pedir que sean capaces de ver qué relaciones se mantienen en ambos planos como proporción de distancias, orden de puntos, ángulos…

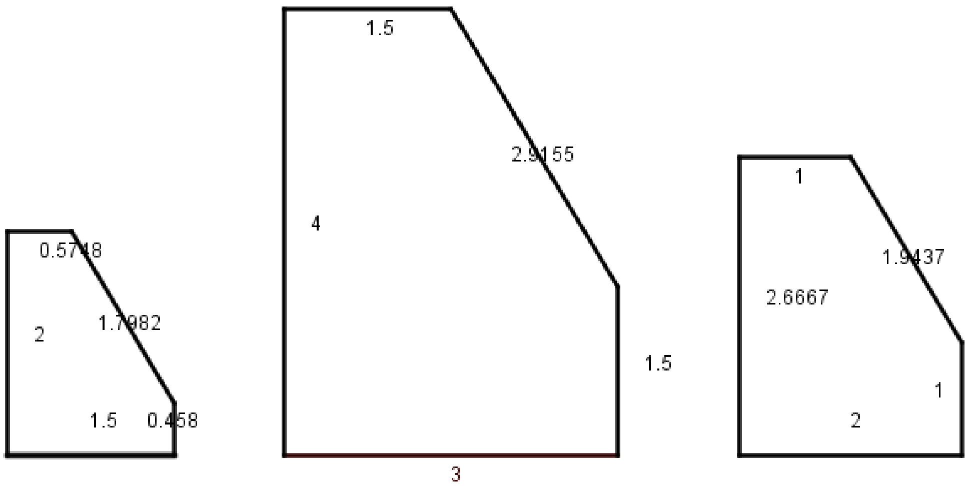
Problema 10

Las siguientes figuras:

a) ¿son semejantes?

b) ¿podrías justificarlo?

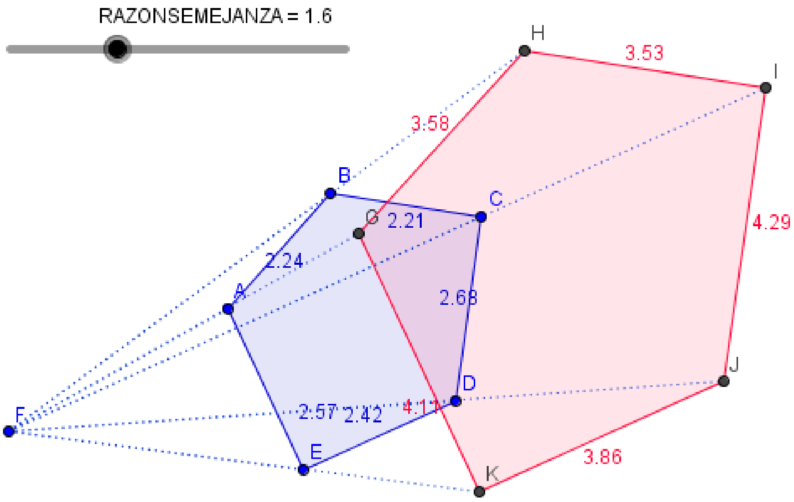




En este caso comenzamos a añadir figuras geométricas, primero dentro de un plano, lo que les da la seguridad de que se encuentran ante figuras semejantes a pesar de encontrar la imagen girada y de distinto tamaño. Si el plano es correcto las distancias relativas serán las mismas. En la segunda secuencia de figuras jugamos con la similitud de formas y el paralelismo para alejar preconceptos o prejuicios sobre la semejanza obligando al alumno a establecer relaciones de proporcionalidad.

Problema 11

Modifica las siguientes figuras y apoyándote en Geogebra calcula el área de las figuras que obtengas y compara la razón entre áreas con la razón de semejanza entre las figuras, ¿qué observas?



https://drive.google.com/file/d/0B0F56ln5GwaAT1RNVHhLallidkE/view?usp=sharing

Apoyándonos en Geogebra vamos a reforzar el concepto de semejanza en figuras planas. Moviendo los puntos de la figura azul los alumnos pueden modificar la forma del polígono obteniendo una figura semejante en rojo. La barra de desplazamiento nos permite alterar la razón de semejanza y la facilidad de las medidas en Geogebra permite introducir rápidamente variantes al problema. Pueden comprobar la razón de semejanza con las medidas en pantalla o se pueden eliminar algunas de ellas para que las obtengan los alumnos. Respecto del problema de las áreas hay que buscar razones de semejanza sencillas para que los alumnos puedan ver que la razón de las áreas es el cuadrado de la razón de semejanza.

Como técnicas asociadas:

1. Identificar figuras semejantes
2. Identificar segmentos homólogos en diferentes figuras
3. Establecer la razón o proporción entre segmentos.
4. Deducir la razón de semejanza entre figuras planas.
5. Establecer la razón de semejanza entre las áreas

Como tecnologías asociadas:

Definición del concepto de semejanza y razón de semejanza:

- *Dos polígonos son semejantes si los segmentos homólogos son proporcionales y los ángulos que forman esos segmentos iguales. A la razón o proporción constante entre segmentos homólogos le llamamos razón de semejanza.*

Razón de semejanza de las áreas:

- *La razón de semejanza de las áreas de figuras planas es el cuadrado de la razón de semejanza entre los segmentos homólogos de esas figuras*

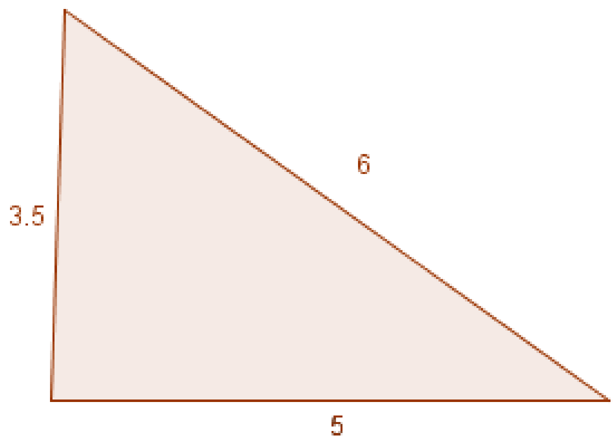
Identificar qué movimientos en el plano de los que ya conocen (simetrías, traslaciones y rotaciones) no alteran las condiciones de semejanza.

4. Identificar condiciones de semejanza en triángulos

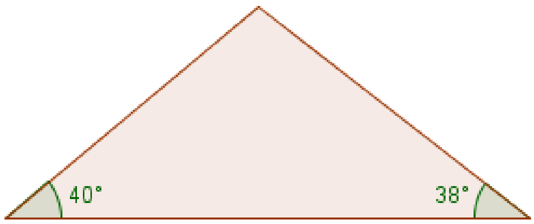
Problema 12

Sigue las instrucciones para dibujar los siguientes triángulos y comprueba si son semejantes

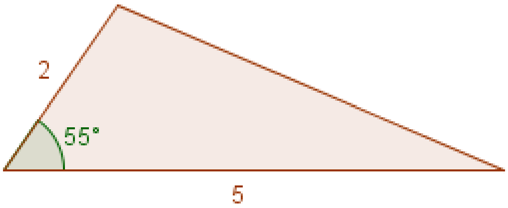
A. Dibuja el siguiente triángulo aumentando el tamaño de cada lado según la razón $\frac{3}{2}$. Mide con ayuda del transportador los ángulos de los dos triángulos y compara sus valores.



B. Dibuja un triángulo que tenga los mismos ángulos que el de la figura aumentando su tamaño. Mide ahora los lados de los dos triángulos y compara las razones entre ellos.

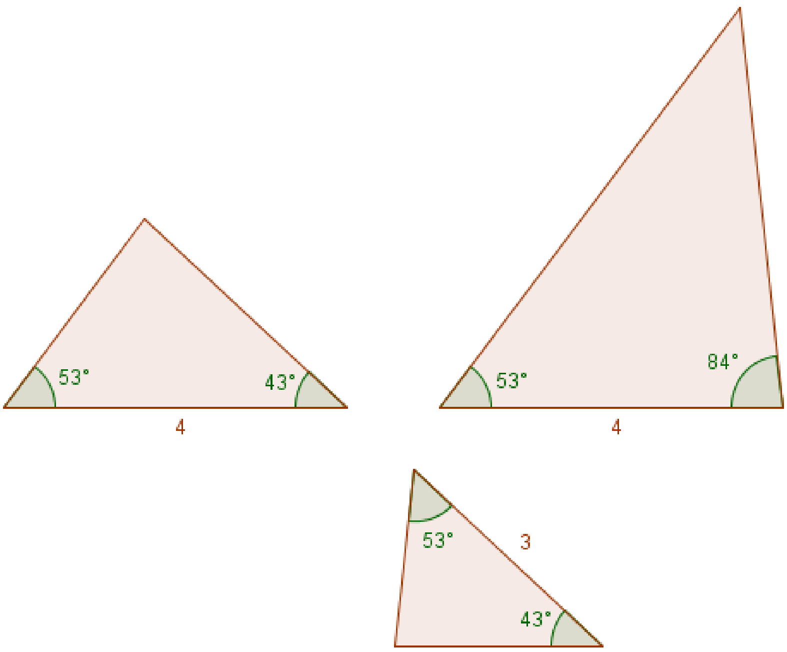


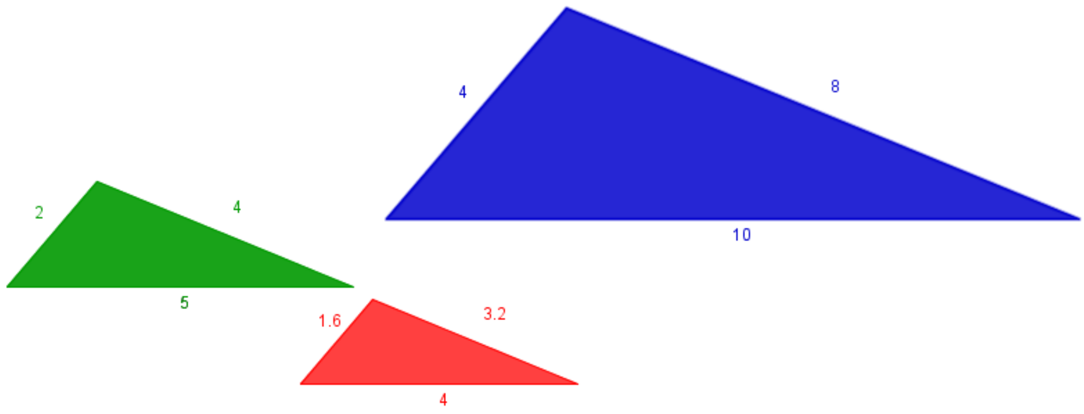
C. Dibuja el siguiente triángulo aumentando el tamaño de cada lado según la razón 1,2. Mide y compara los ángulos de los dos triángulos. Mide los lados desconocidos en los dos triángulos y calcula la razón.



Problema 13

¿Son semejantes estos triángulos?, ¿Puedes justificarlo?





Se trata con estos problemas de trasladar las condiciones de semejanza vistas anteriormente al caso particular de los triángulos. Estableciendo distintas posibilidades para que en función del tipo de datos comprueben si es suficiente para poder establecer las condiciones de semejanza.

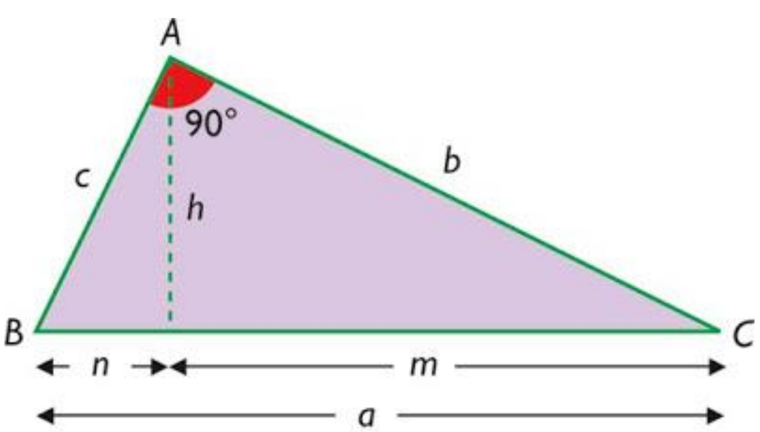
En el problema 12 se busca que el alumno determine los casos de semejanza de triángulos.

En le problema 13, vistos los casos de semejanza se trata de que los alumnos comprueben qué movimientos en el plano conservan la semejanza.

En el caso de los triángulos de colores se busca que comprueben las distintas relaciones de proporción. Hay que presentar el concepto de proporción separardo de la imagen mental de “el doble”, “el triple” o la mitad”. Lo han visto antes en el caso de los planos.

Problema 14

Vamos a intentar demostrar los Teoremas de Pitágoras y de la altura estableciendo las relaciones de semejanza entre los triángulos que ves en la siguiente figura:



Este problema es demasiado complicado para ellos. No saben dónde tiene que llegar. Les vamos a ir guiando pidiéndoles que primero identifiquen los triángulos semejantes que vean, los resalten en el dibujo y los dibujen aparte de manera que los lados homólogos queden paralelos.

Luego les pediremos que establezcan las relaciones de semejanza en las que estén implicados los catetos y la hipotenusa del triángulo grande. El resto lo hará el profesor, el objetivo no es que completen la demostración pero sí que vean una de las posibles utilidades del concepto de semejanza.

Están presentes varias de las técnicas y tecnologías anteriores:

1. Identificar condiciones de semejanza en triángulos
2. Identificar segmentos homólogos en triángulos
3. Identificar ángulos homólogos en triángulos
4. Medida de ángulos
5. Establecer la razón o proporción entre segmentos.

Como tecnologías asociadas:

Casos de semejanza de triángulos

1. Dos triángulos son semejantes si tiene dos ángulos iguales
2. Dos triángulos son semejantes si tienen los tres lados proporcionales
3. Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulos que forman es igual.

Particularización para triángulos rectángulos:

1. Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo igual
2. Dos triángulos rectángulos son semejantes si sus dos catetos son proporcionales
3. Dos triángulos rectángulos son semejantes si un cateto y la hipotenusa son proporcionales

Identificar qué movimientos en el plano de los que ya conocen (simetrías y rotaciones) no alteran las condiciones de semejanza.

Problema 15

Expresa las condiciones que tienen que cumplir dos triángulos para ser semejantes.

a) ¿Y si son triángulos rectángulos?

b) ¿Y si son triángulos equiláteros?

c) ¿Y si son triángulos isósceles?

Problema 16

Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
2. Todos los triángulos isósceles son semejantes.
3. Si multiplicamos una terna pitagórica por 2 obtenemos un triángulo rectángulo semejante al primero.
4. Todos los hexágonos regulares son semejantes.
5. Todos los pentágonos son semejantes.
6. Para que dos rectángulos sean semejantes sus lados deben ser proporcionales.
7. Si dos triángulos rectángulos tienen un ángulo agudo igual son semejantes.
8. Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen los dos catetos proporcionales.
9. Los cuadrados no son semejantes a los rectángulos.
10. Dos triángulos que son semejantes dejan de serlo cuando uno de ellos se gira alrededor de uno de los vértices.
11. Para que un triángulo sea semejante a otro tiene que ser más grande.
12. Si a todos los lados de un triángulo les sumamos 2 el triángulo que se obtiene es semejante al primero.
13. Si a todos los lados de un triángulo les multiplicamos por 2 el triángulo que se obtiene es semejante al primero.
14. Dos triángulos con los tres lados iguales son semejantes.
15. Dos triángulos con los tres lados proporcionales son semejantes.
16. Dos polígonos con los lados proporcionales son semejantes.

Una pregunta final para pensar: ¿todas las circunferencias son semejantes?

Reforzamos los conceptos anteriores con dos actividades en las que tendrán que recopilar los conceptos trabajados anteriormente.

5. Aplicación práctica de criterios de semejanza

5.1. Teorema de Tales

Problema 17

El canal de la foto tiene forma de trapecio regular. De manera habitual el nivel del agua alcanza los 2 m de altura y la longitud del talud que está mojada es de 3,25 m. Un día observamos la marca que dejó el agua y se encuentra a 30 cm del nivel habitual (medido sobre el talud)

¿Qué altura llegó a alcanzar el agua?

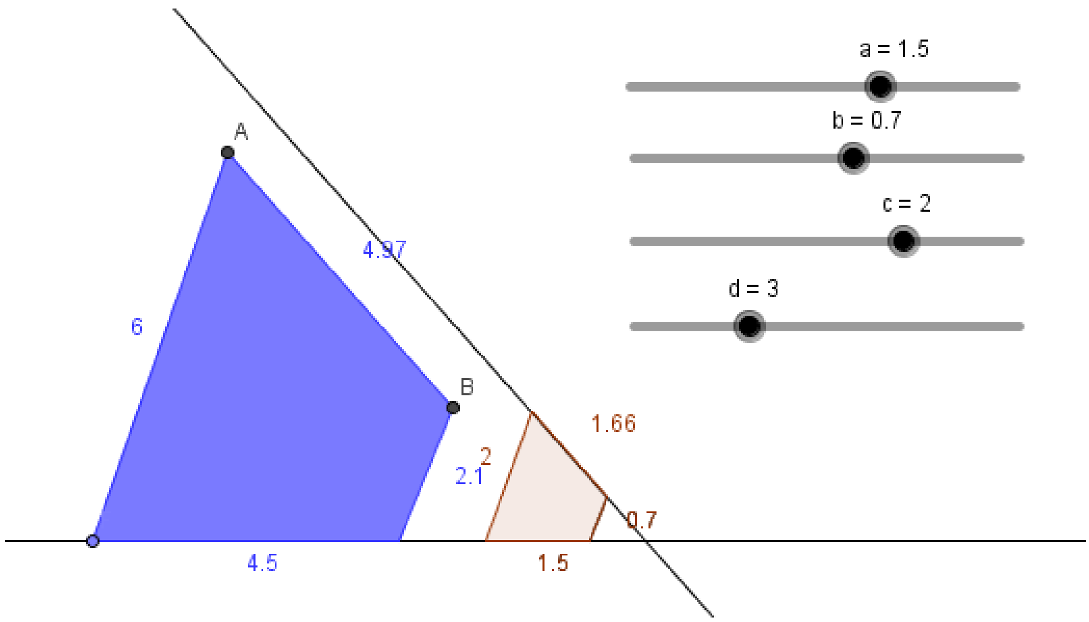
Y si el agua baja 70 cm, ¿Dónde estará la nueva marca respecto del fondo?

Haz un dibujo con todas las posiciones del agua y calcula las proporciones entre los distintos segmentos que observas.

Este problema nos va a permitir introducir el Teorema de Tales. Con sus conocimientos actuales los alumnos pueden resolver el problema estableciendo la relación de semejanza entre los triángulos que se forman, para posteriormente comprobar que se mantiene la proporción si consideramos los segmentos por separado

Problema 18

Los siguientes cuadriláteros son semejantes. ¿Serias capaz de encajar el cuadrilátero azul entre las dos rectas respetando la condición de semejanza? En la aplicación de Geogebra, d representa la razón de semejanza. Modifica el dibujo moviendo en cuadrilátero azul y comprueba que se cumple el teorema de Tales.



https://drive.google.com/file/d/0B0F56ln5GwaAM0p0T3d1SDhBTDQ/view?usp=sharing

Aquí de nuevo partimos de dos figuras que sabemos semejantes para componer una figura que nos vuelve a recordar la construcción de Tales y permite comprobar la veracidad del Teorema partiendo de datos ya conocidos. La presentación a través de Geogebra permite analizar multitud de casos, no es una demostración formal pero la generalización de los ejemplos ayuda a la comprensión

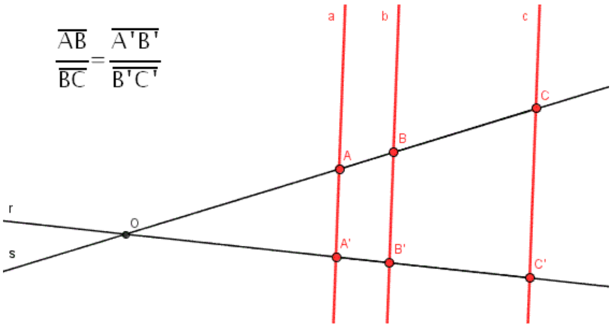
Como técnicas asociadas:

1. Identificar triángulos semejantes
2. Establecer la razón o proporción entre segmentos homólogos en figuras semejantes.

Como tecnologías asociadas:

Teorema de Tales:

Si las rectas a, b, c son paralelas y cortan a otras dos rectas r y s, entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.

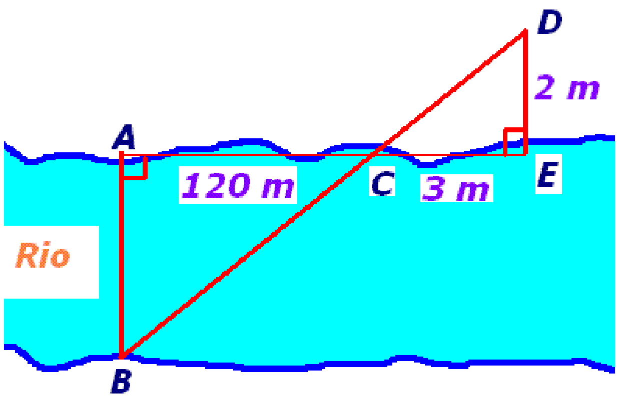


Dos triángulos en posición de Tales son semejantes

5.2.Calculo de alturas/distancias inaccesibles

Problema 19

Observa el dibujo:

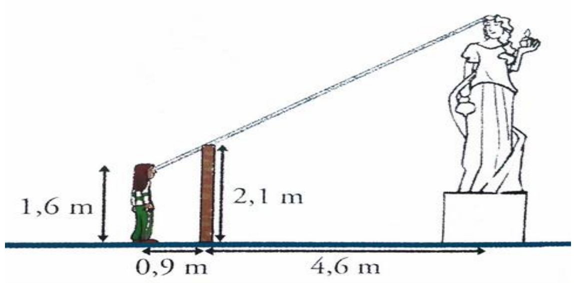


a) Calcula el ancho del rio

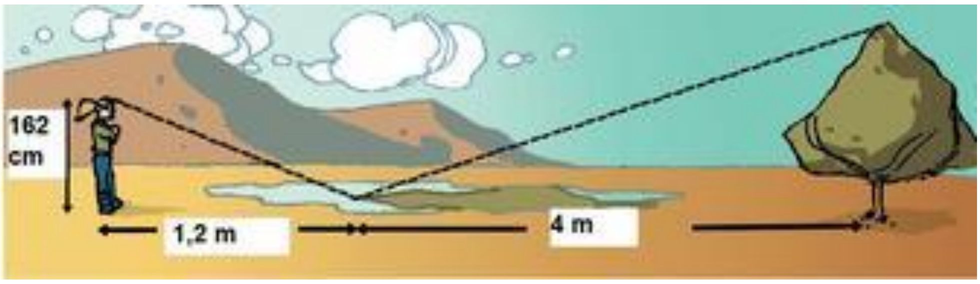
b) Serías capaz de describir el método que has utilizado.

Problema 20

A la vista de la imagen calcula la altura de la estatua. Dibuja las figuras que te hayan servido para hacer el cálculo.

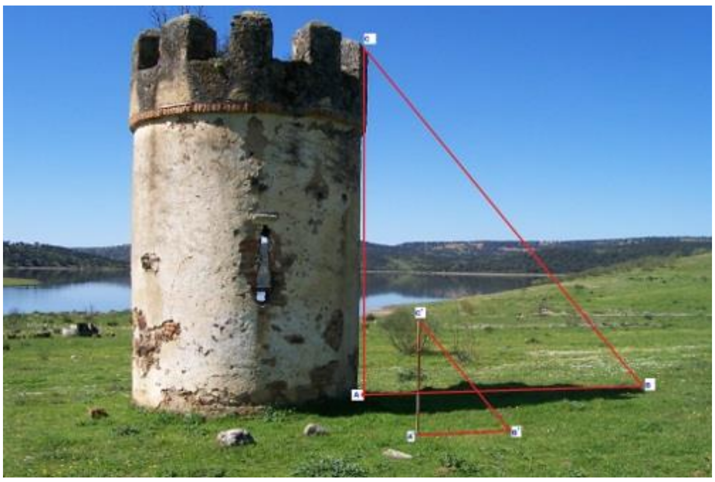


Una vez resuelto, ¿serías capaz de describir que hace este chico para calcular la altura del árbol? ¿Cuánto mide el árbol?



Problema 21

Una vara de 2 m proyecta una sombra de 1,75 m, ¿Cuánto mide la Torre si su sombra mide 5,25 m?



Como técnicas asociadas:

1. Identificar triángulos semejantes en posición de Tales
2. Identificar triángulos semejantes en posición de Tales inversa
3. Establecer la razón o proporción entre segmentos homólogos en figuras semejantes.

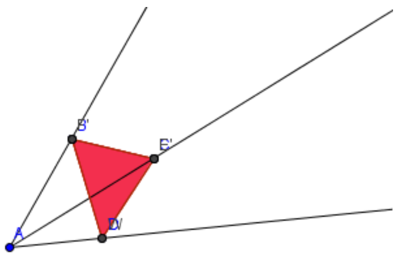
Como tecnologías asociadas:

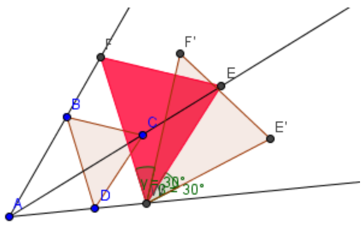
1. Teorema de Tales
2. Triángulos en posición de Tales: Dos triángulos están en posición de Tales si tienen un ángulo común y los lados opuestos son paralelos.
3. Triángulos en posición de Tales inversa: Dos triángulos están en posición de Tales inversa si tienen un ángulo opuesto por el vértice y los lados opuestos son paralelos.

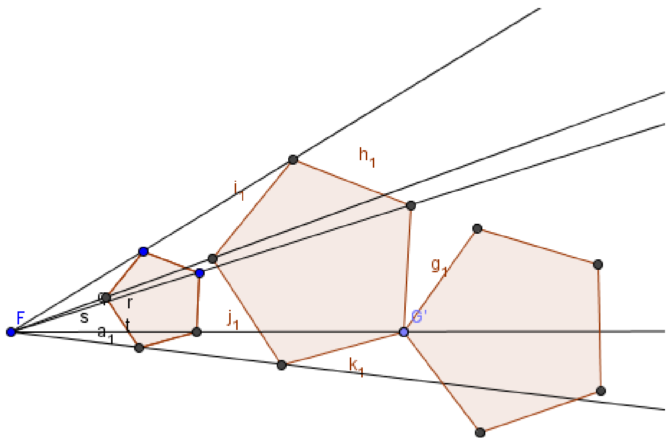
6. Dibujo de figuras semejantes. Homotecia

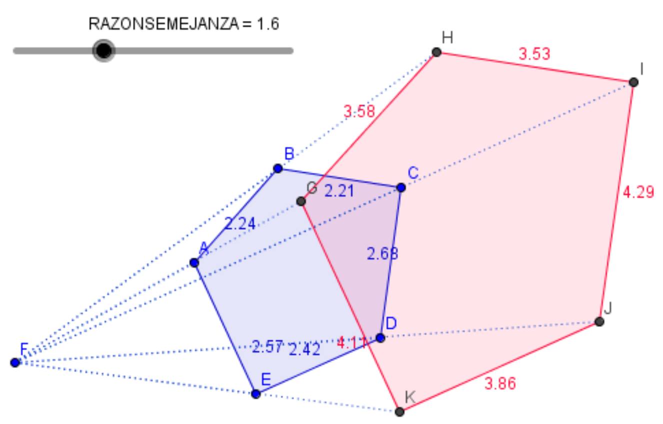
Problema 22

Vamos a reforzar el concepto de semejanza y las condiciones de semejanza con varias construcciones en Geogebra. Se introduce el concepto de homotecia y se presenta como una manera de obtener una figura semejante de otra.









Para poder descargar las construcciones y ver las animaciones aporto los siguientes enlaces:

https://drive.google.com/file/d/0B0F56ln5GwaAeDBEVEZhRG1lbEk/view?usp=sharing

https://drive.google.com/file/d/0B0F56ln5GwaASEtQMERZMmx4ZTA/view?usp=sharing

https://drive.google.com/file/d/0B0F56ln5GwaAT1RNVHhLallidkE/view?usp=sharing

Con estas construcciones los alumnos pueden manipular la forma del triángulo, comprobar que se mantiene los ángulos, medir razones de semejanza.

También se puede animar el giro de la figura para poder comprobar que los giros no anulan la condición de semejanza.

Aquí se muestra la técnica de construcción de figuras semejantes mediante homotecias.

Como tecnologías asociadas:

Identificar movimientos en el plano que no alteran las condiciones de semejanza.

Definición de homotecia:

- *Se llama homotecia de centro O y razón k (distinta de cero) a la transformación que hace corresponder a un punto A otro A´, alineado con A y O, tal que: OA´=k·OA.*

Completamos así una secuencia de problemas que entiendo deben ser suficientes para comprender el concepto de semejanza y trabajar las técnicas que se detallan.

El profesor puede decidir ejercitar más estos conceptos por medio de ejercicios más simples o utilizar pequeñas variantes de alguno de los problemas que se presentan para este propósito.

Las construcciones en Geogebra presentadas permiten generar muchas actividades donde los alumnos pueden ejercitar técnicas como:

- Identificación de figuras semejantes
- Establecer la razón o proporción entre segmentos homólogos en figuras semejantes
- Medida de ángulos
- Identificar condiciones de semejanza en triángulos o polígonos

En cada problema presentado he tratado de explicar la metodología de puesta en práctica en el aula junto con las técnicas y tecnologías que están asociadas a cada problema o grupo de problemas.

Las técnicas se justifican mediante la formalización de las definiciones por parte del profesor. Se pretende que alguna de estas definiciones haya surgido de manera intuitiva a la hora de ir realizando las actividades propuestas, pero dejando para el profesor el momento de institucionalización.

F. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

En el siguiente cuadro se recoge la secuencia didáctica a seguir. Desarrollé este tema durante mi periodo de Practicum II. Hicimos varias de las actividades que aquí se recogen aunque me apoyé más en ejercicios de su libro de texto. Durante el Practicum el tema se desarrolló a lo largo de 7 sesiones frente a las 11 que aquí se incluyen, eso determinó que parte del trabajo lo realizaran los alumnos en casa y que en clase se trabajara en la pizarra.

El planteamiento más adecuado de estas sesiones es dejar tiempo en clase de trabajo, bien individual o en grupo, a los alumnos para que se enfrente a los problemas antes de que sea el profesor el que se haga cargo de su resolución.

SESIÓN	ACTIVIDAD	DURACIÓN
1	Actividades de Evaluación inicial y corrección en la pizarra	50 min
2	Planteamos el **Problema 1,** medimos la clase. Se introduce el concepto de escala y de razón de proporcionalidad.	50 min
3	Desarrollamos los **Problemas 3 y 4**. Seguimos manejando el concepto de escala. En el problema 4 se introduce la necesidad de mantener la forma de las figuras. Presentamos el **Problema 2** con idea de desarrollarlo en la siguiente sesión	40 min 10 min
4	Desarrollamos el **Problema 2**. Se introduce el concepto de semejanza Trabajamos los **Problemas 5, 6 y 7**	30 min 20 min
5	Trabajamos los **Problemas 8, 9 ,10 y 11**. Ya se ha introducido el concepto de semejanza, es momento ahora de reforzarlo con una definición concreta estableciendo las condiciones de semejanza de manera formal.	50 min
6	Trabajamos los **Problemas 12, 13, 14, 15 y 16**. Se institucionalizan los casos de semejanza de triángulos.	50 min
7	Trabajamos los **Problemas 15 y 16**. Estos problemas se utilizan como un nuevo momento de institucionalización para afianzar conceptos.	50 min
8	Se desarrollan los **Problemas 17 y 18.** Se institucionaliza el teorema de Tales	50 min
9	Se desarrollan los **Problemas 19, 20 y 21. Aplicaciones de la semejanza y Teorema de Tales.** Se desarrolla el **Problemas 22**. Introduciendo el concepto de homotecia y dibujo de figuras semejantes.	30 min 20 min
10	Sesión de evaluación. Examen escrito	50 min
11	Corrección del examen, se resuelven dudas de forma particular y general	50 min

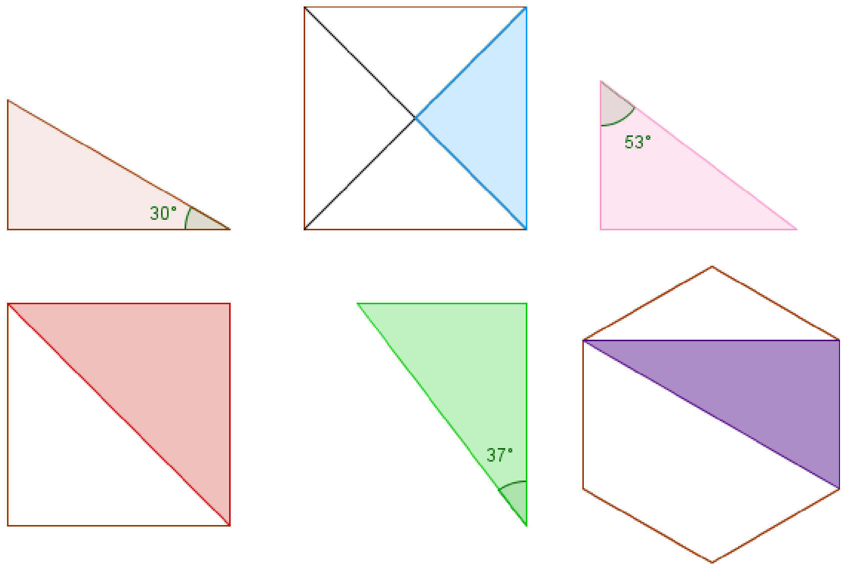
G. Sobre la evaluación

EXAMEN MATEMA´TICAS 2º ESO

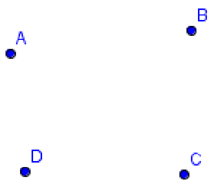
Nombre y apellidos: …

(Contesta en los huecos. Incluye las "cuentas" en esta hoja. Puedes usar calculadora).

1) Entre los siguientes triángulos rectángulos hay algunos que son semejantes entre sí, averigua cuáles son. Razona tu respuesta.



2) Tenemos un plano aproximado de cuatro ciudades y sus distancias son:

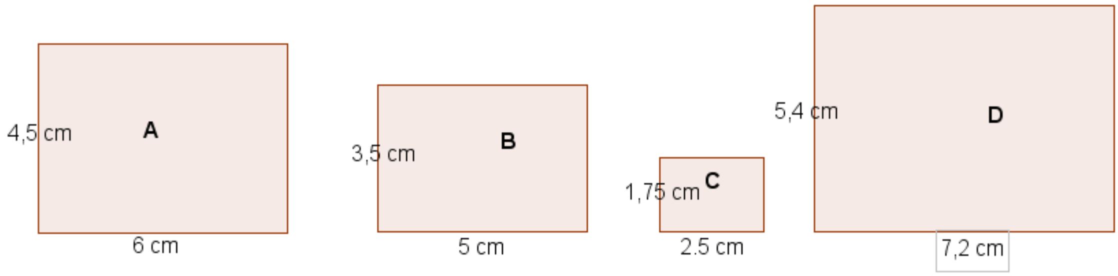


A y B 40 Km; B y C 25 Km; C y D 20 Km y A y C 30 Km

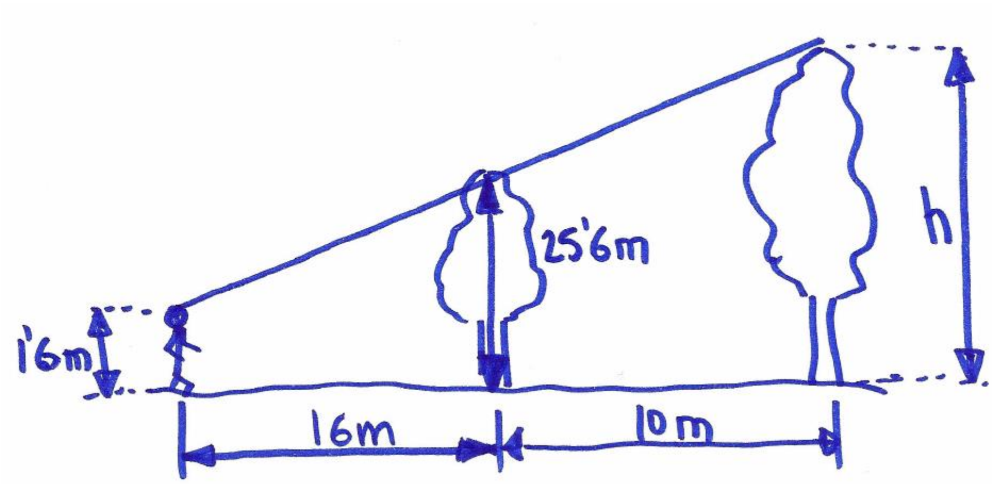
a) ¿Necesitas más datos para poder dibujar un plano a escala? Razona tu respuesta y en caso afirmativo di cuales te harían falta.
b) Dibuja a escala 1:5000000 un plano con las ciudades A, B y C

3) En un mapa a escala E = 1:50000 la distancia entre dos pueblos, P y Q, es 11 cm. ¿Cuál es la distancia real entre P y Q? La distancia real entre otros dos pueblos, M y N, es 18 km. ¿A qué distancia estarán en el mapa?

4) Indica cuáles de estos rectángulos son semejantes entre sí. Justifica tu respuesta.

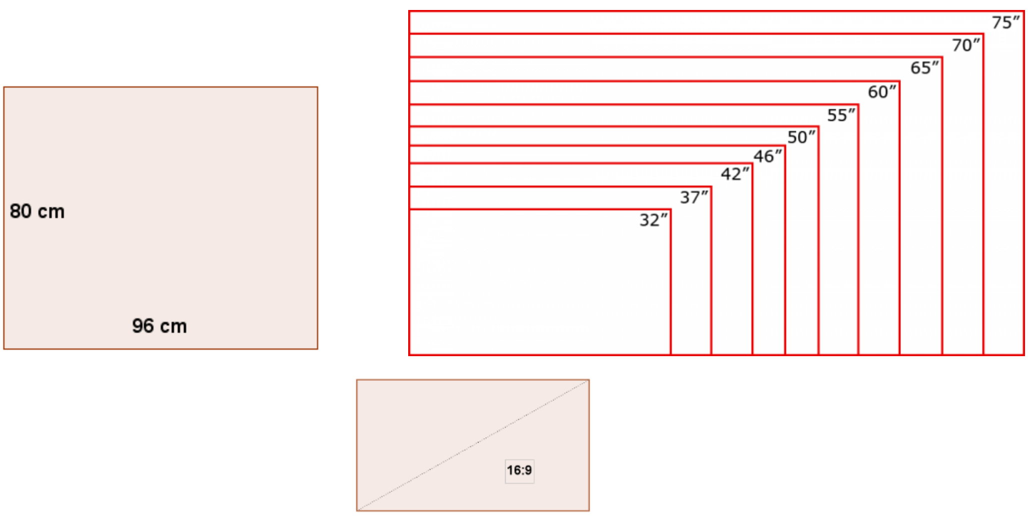


5) Halla la altura h del árbol más alto.



6) El mueble donde queremos instalar nuestra televisión tiene un hueco rectangular de 96 cm de ancho por 80 cm de alto. Queremos comprarnos la TV más grande posible (que nos quepa en el hueco del mueble) y sabemos que la altura de la de 32’’ (32 pulgadas) es de 27,4 cm. ¿Cuál nos compramos?
Ayudas:

$$1 \text{ pulgada} = 2{,}54 \text{ cm}$$



A continuación destaco los aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático que pretendo evaluar con cada una de las preguntas de esta prueba.

El ***ejercicio nº 1*** es más bien una pregunta de teoría. No es un problema propiamente dicho aunque si va a exigir al alumno que realice algún cálculo para el que deberá conocer las propiedades de las figuras geométricas que se le presentan, triángulos, cuadrados y hexágonos.

En este ejercicio no se plantea el uso de ninguna técnica salvo que consideremos como tal que la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180º.

En este caso yo más bien la interpreto como una tecnología. Entre las tecnologías que se evalúan se incluye la propia definición de condición de semejanza en triángulos, adaptada a los triángulos rectángulos y el conocimiento de las propiedades de las figuras geométricas del cuadrado y hexágono, en concreto el valor de sus ángulos internos.

Como tarea principal objeto de evaluación está conocer que dos triángulos son semejantes si tienen dos lados iguales y particularizar par el caso de los triángulos rectángulos que son semejantes si tiene uno de los ángulos agudos igual.

Como tareas auxiliares específicas están:

- La suma de los ángulos de un triángulo es 180º
- Las diagonales de un cuadrado son las bisectrices de los ángulos internos
- Los ángulos internos de un hexágono regular miden 120º

El ***ejercicio nº 2*** es un problema de dibujo de figuras geométricas a partir de unos datos y aplicación de escalas.

Como técnicas en este ejercicio tenemos:

- Dibujar un triángulo conocidos los tres lados con regla y compas.
- Dibujar un ángulo conocida su amplitud
- Conversión de unidades de longitud
- Aplicar una escala, se explica mediante tres técnicas:
    - Plantear una regla de tres
    - Establecer una proporcionalidad directa

- Multiplicar o dividir la distancia por el denominador de la escala o razón de semejanza.

Como tecnologías aparecen el concepto de semejanza, que tienen que cumplir dos figuras planas para ser semejantes. A la hora de justificar se pide alumno que reflexione sobre la imposibilidad de situar un punto en el plano conociendo solamente el dato de su distancia a un vértice de una figura plana. La figura resultante no tiene por qué cumplir la condición de semejanza con la figura plana que representa la realidad otro punto. La equivalencia entre la escala en un plano y la razón de semejanza entre figuras planas. Las condiciones necesarias para poder definir un triángulo.

Como tarea principal esta identificar las condiciones para que una figura sea semejante a otra. Y las condiciones para poder establecer la semejanza entre triángulos.

También tenemos como tarea principal aplicar la escala o la razón de semejanza.

Como tareas auxiliares específicas:

- Dibujar un triángulo conocidos los tres lados
- Dibujar un ángulo conocida su amplitud.

Como tareas auxiliares generales:

- Conversión de unidades de longitud.

El ***ejercicio nº 3*** es un problema de aplicación de escalas.

Como técnicas en este ejercicio tenemos:

- Conversión de unidades de longitud
- Aplicar una escala, se explica mediante tres técnicas:
    - Plantear una regla de tres
    - Establecer una proporcionalidad directa
    - Multiplicar o dividir la distancia por el denominador de la escala o razón de semejanza.

Entendemos este más como un ejercicio que como un problema. Se pide la aplicación directa de unas técnicas, no están presentes las tecnologías.

Como tarea principal está la aplicación directa de una escala o razón de semejanza.

Como tareas auxiliares generales:

- Conversión de unidades de longitud.

El ***ejercicio nº4*** es un problema de aplicación de relación de semejanza en figuras planas.

Las técnicas que están presentes son:

- Calcular la razón de semejanza entre dos figuras planas calculando el cociente entre lados homólogos.

Como tecnología:

- Identificar las condiciones necesarias para la semejanza de figuras planas.

La tarea principal es identificar la relación de semejanza y calcula la razón semejanza.

El ***ejercicio nº 5*** es un problema de aplicación de semejanza de triángulos.

Como técnicas que aparecen tenemos:

- Establecer la relación de semejanza entre lados homólogos de figuras semejantes.
- Identificar como figuras semejantes dos triángulos en posición de Tales.
- Descomponer una figura plana en figuras planas más simple.
- Resolver una ecuación de primer grado.

Como tecnologías:

- Semejanza de figuras planas
- Teorema de Tales

Como tareas principales tenemos identificar las figuras semejantes existentes en el dibujo, aplicando convenientemente la relación de semejanza entre lados homólogos.

Como tareas auxiliares generales:

- Resolver una ecuación de primer grado con una incógnita.
- Operar con fracciones

El ***ejercicio nº 6*** es un problema de aplicación de semejanza de figuras planas.

Como técnicas que aparecen tenemos:

- Establecer la relación de semejanza entre lados homólogos de figuras semejantes.

Como tecnologías:

- Semejanza de figuras planas

Como tareas principales tenemos identificar las figuras semejantes existentes en el dibujo, aplicando convenientemente la relación de semejanza entre lados homólogos.

Como tareas auxiliares generales:

- Operar con fracciones

Las respuestas que se esperan en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos son:

En el ***ejercicio 1*** solo hay una opción correcta en cuanto a relaciones de semejanza, la que une los triángulos 1 y 6, el 2 y el 4 y el 3 y el 5. En cuanto a razonar porque son semejantes al no darles valores numéricos solo pueden encontrar el argumento de los ángulos. Son semejantes porque tienen los tres ángulos iguales.

En el caso de la pareja 1 y 6 la dificultad mayor se encuentra en la figura 6, deben de identificarla como un hexágono regular, conocer cuánto mide cada ángulo interior y por diferencias ser capaces de localizar los ángulos de 30º y 60º dentro del triángulo. Entiendo que es la figura más difícil.

El caso de los triángulos rectángulos isósceles dentro de los cuadrados no debería plantear dificultades. Deben de saber que las diagonales de un cuadrado son las bisectrices de los ángulos internos.

Los triángulos 3 y 5 solamente precisan hallar el valor del ángulo desconocido sabiendo que la suma de todos es 180º

En el ***ejercicio 2*** lo esperable es que comiencen resolviendo la segunda parte dibujando el triángulo ABC (en principio no es esperable mucha dificultad en esta parte del ejercicio) y luego traten de colocar el punto D. La dificultad principal es que no sepan establecer correctamente la proporcionalidad entre el plano y la realidad a través de la escala. Como dificultad esperada está las operaciones con fracciones.

Para posicionarla correctamente necesitan saber al menos el ángulo que forma el segmento AD con el AC o con el AB (o el ángulo del segmento DC o el BD respecto de los otros dos). También bastaría con saber la distancia de D con respecto a C o D. El razonamiento esperado es que para dibujar un triángulo es necesario conocer los tres lados o dos lados y el ángulo que forman. Algún alumno puede razonar situando D en la circunferencia de centro A y buscando un punto de corte con las rectas DC o DB. El croquis elimina las posibles dos soluciones en este caso

Como complicaciones, a la vista del dibujo algún alumno puede intentar dibujar algo parecido a un paralelogramo o intentar dibujar el triángulo ADC semejante al ABD sin tener motivos para ello. Algún alumno colocará la ciudad D en el lado AB al ser la única distancia menor.

Para el ***ejercicio 3***, en principio es válido cualquier método de establecer la proporción. Podrán resolver utilizando una regla de tres, estableciendo la proporción de forma directa o simplemente multiplicado o dividiendo (según el caso) la distancia por la escala.

Al igual que en el ejercicio anterior la dificultad principal es que no sepan establecer correctamente la proporcionalidad entre el plano y la realidad a través de la escala. Como dificultad esperada está las operaciones con fracciones. Es posible que el ejercicio esté bien planteado pero tengan fallos a la hora de resolver. Deberían poder identificar una solución incoherente. También es posible que se produzcan errores a la hora de convertir Km en cm.

En el ***ejercicio 4*** la respuesta correcta es marcar como semejantes las parejas de rectángulos AD y BC y descartar la semejanza en el resto de casos para lo que es suficiente con justificar que no son semejantes cualquiera de estas cuatro parejas AB, AC, DB o DC. También será correcto que el alumno pruebe esas cuatro posibilidades sin considerar que una vez hallada la semejanza entre AD y BC es suficiente con descartar una. Para justificarlo tendrán que establecer la igualdad, o desigualdad en su caso, entre las proporciones de lados homólogos. Las justificaciones pueden ser exclusivamente numéricas o mediante un texto, o ambas.

Entre las dificultades está el que algún alumno establezca la semejanza entre AC en términos de adición no de proporción. Es esperable en este caso que una vez encontrada una pareja que cumple sus requisitos descarte seguir indagando más posibilidades.

Esta última situación es esperable en cualquier caso, ya que están muy acostumbrados a ejercicios con una única solución. Es de espera que el haberse enfrentado antes al primer ejercicio les haga buscar todas las relaciones. El hecho de marcar las longitudes de los lados les orientará a establecer proporciones olvidándose de los ángulos que en este caso no les aporta información, pero es posible que algún alumno intente utilizar el mismo criterio de igualdad de ángulos de primer ejercicio y concluya que todos los rectángulos son semejantes.

En el ***ejercicio 5*** pueden establecer la semejanza de forma directa entre los dos triángulos que se forman o aplicar directamente el Teorema de Tales. Cualquier posibilidad es igualmente correcta.

Primer planteamiento erróneo es que se atasquen e intenten resolver exclusivamente por Pitágoras, ya que lo han visto en el tema anterior y lo tienen muy reciente. Pueden utilizar Pitágoras para calcular una hipotenusa pero al final tendrán que establecer una relación de semejanza entre triángulos y verán que han perdido el tiempo.

Otra dificultad es que al ver en la figura dos trapecios que comparten un vértice y dos lados piensen que son semejantes por analogía a los triángulos en posición de Tales e intenten resolver directamente. El error más común es que una vez establecida la proporción, de forma correcta, se olviden de sumar la altura del observador para dar el resultado que realmente se pide, que es la altura del árbol.

En el ***ejercicio 6***, la forma esperada de resolver es ir calculando la base de los distintos tamaños de televisión utilizando la relación de proporción del formato de las TV (16:9) hasta ver cuál es la más grande que encaja. También pueden calcular el tamaño de la TV de 32” utilizando Pitágoras para luego calcular el resto de bases estableciendo la relación de semejanza entre las diagonales y las bases (para esto deben de saber que el valor en pulgadas corresponde a la diagonal). No les vamos a exigir que comprueben las proporciones del mueble con las del formato de TV.

De nuevo entre las dificultades está el intentar utilizar Pitágoras. Le va a complicar las operaciones, en el primer caso para la de 32” tendrán que convertir las pulgadas a cm y posteriormente lo van a seguir haciendo cuando establezcan relaciones de proporción aunque ya no les haría falta. Muchas operaciones y posibilidad de errores.

Otra dificultad pasa por el hecho de identificar que la dimensión analizar es la base, es posible, dado que el dato que se facilita es una altura que intenten resolver comparando este dato. La conversión de unidades puede que les despiste, aunque no es necesario para resolver.

Los criterios de calificación empleados son:

Los seis ejercicios valen lo mismo, se puntúan de manera independiente sobre 10 puntos y luego se establece la nota definitiva sobre 10 de manera proporcional. Los ejercicios 2 y tres con dos preguntas se puntuarán de forma independiente cada una de ellas correspondiéndole a cada una el 50% del valor total del ejercicio.

Ejercicio 1

Si el alumno consigue encontrar las tres parejas de triángulos semejantes pero no explica ni comenta nada por escrito se le otorgará el **20%** del valor total. De la misma forma que si encuentra las parejas y añade algún tipo de justificación incorrecta o sin sentido. Corremos el riesgo de premiar la suerte a cambio de premiar a aquel que de manera intuitiva entiende el concepto de semejanza pero no acierta a explicarlo.

De las posibles explicaciones correctas vamos a distinguir:

- Solo encuentra una pareja (suponemos que la 3 y 5) pero explica los motivos correctamente, alude a la igualdad de ángulos (justificando esa igualdad en función de las figuras geométricas de que se trate) explicitando que esa condición es suficiente cuando se trata de semejanza de triángulos: **50%**
- Mismo resultado que la anterior pero con dos parejas de triángulos. **75%**
- Ejercicio correcto al completo. **100 %**

Si las explicaciones están incompletas, por ejemplo alude a la igualdad de ángulos pero no específica que esa condición solo es válida entre triángulos o polígonos regulares, o no justifica el porqué de la igualdad de ángulos, a la puntuación anterior se le quitará un **10%.**

Si las explicaciones son incoherentes entre sí (en lo que se refiere a establecer las condiciones de semejanza) pero alguna de las justificaciones es correcta se retará un 20**%** a los valores anteriores**.**

Ejercicio 2

El apartado a) se valorará al 100% si la respuesta es correcta con cualquiera de las condiciones explicadas anteriormente o cualquier otra que verdaderamente posicione el punto D de manera inequívoca.

Se restará un 10% si hay sobreabundancia de datos solicitados (con explicación correcta)

Si pide los datos correctos pero no justifica ni explica nada se valorará un **75%**.

Si pide los datos correctos pero explica de manera incoherente o incorrecta se valorará al **50%**

El apartado b) se valorará al 100% si el dibujo es correcto (vale un croquis) y la forma de obtener los datos también.

Si se equivoca en el planteamiento de las proporciones se calificará con un 0.

Si hay fallos al operar con fracciones o errores de cálculo se restará un 30% salvo que el resultado sea fácilmente observable como incoherente (por ejemplo que resulte mayor en el plano la distancia CB que la AC, o que las distancias obtenidas no se correspondan con un triángulo, o un fallo en las unidades que arroje un resultado totalmente ilógico) en cuyo caso se restará un 50%.

Ejercicio 3

Se valorará de forma análoga al apartado b) del ejercicio anterior.

Ejercicio 4

Si un alumno encuentra de forma correcta (con justificación) una de las dos relaciones de semejanza se valorará un **45%**.

Si encuentra las dos se valorará un **90%.**

El **10%** restante se reserva para el que además justifique el resto de posibilidades.

Si hubiera errores numéricos que dieran lugar a otras relaciones, por ejemplo que son semejantes 3 de los 4 rectángulos pero los planteamientos para establecer las condiciones de semejanza son correctos se valorará un **20%,** salvo que haya incoherencias en la solución planteada.

Ejercicio 5

Si el alumno plantea bien el problema (aunque no lo explique) y da la solución correcta se valorará al **100%**

Si se olvida de restar la altura del observador se restará un **5%**

Los errores numéricos o de operaciones con fracciones restarán hasta un **50%** siempre que la solución pueda ser coherente (no lo sería por ejemplo obtener como resultado un árbol más pequeño). Si el resultado es incoherente pero el planteamiento es correcto se valorará un **30%**. De la misma forma si no es capaz de terminar pero el planteamiento es correcto se valorará igualmente con un **3%**.

Es posible que el alumno empiece resolviendo por Pitágoras, en algún momento deberá plantear una relación de semejanza para continuar, si lo hace bien, estamos en cualquiera de los casos anteriores.

Si no hay un planteamiento correcto se valorará con un 0.

Ejercicio 6

La solución del ejercicio pasa por establecer una relación de semejanza entre los distintos rectángulo de las distintas TV que nos dé el dato que buscamos de las distintas bases para luego comparar con el tamaño del mueble. Para ello puedo utilizar el dato del formato de pantalla o hacer un primer cálculo por Pitágoras de la TV de 32” y luego establecer la proporción en el resto de pantallas. Buscamos ese planteamiento. Si se consigue y se soluciona el ejercicio se valorará con un **100%**.

Si se tiene un planteamiento correcto pero hay errores en las operaciones (ya sea con las fracciones o en los cálculos, o en la posible conversión de pulgadas a cm) se descontará desde un **5%** hasta un **50%**, en función del número de errores, siempre que los resultados sean coherentes (el orden de los tamaños debe ser el mismo y por ejemplo las bases no pueden ser mayores que sus respectivas diagonales). Si los resultados no son coherentes con el problema se restará un **30%**.

La misma valoración tendrá el ejercicio bien planteado pero incompleto.

Si se comienza estableciendo relaciones de semejanza en las dimensiones del mueble de forma correcta pero no se sabe continuar se valorará con un **25%**

H. Sobre la bibliografía y páginas web

- C.B. BOYER (1999). Historia de la matemática. Madrid. Alianza Editorial
- COLERA, J., Gaztelu I., (2009). Matemáticas 2. Educación secundaria. Editorial Anaya
- CASTRO, C., Céspedes, N. (2009) Concepciones de los estudiantes de octavo grado sobre el concepto de semejanza. Universidad Sergio Arboleda
- GUALDRÓN, É. (2006). Estrategias correctas y erróneas en tareas relacionadas con la semejanza. Universidad de Pamplona, Colombia. Universidad de Valencia, España.

- ESCUDERO (2005). Un análisis del tratamiento de la semejanza en los documentos oficiales y textos escolares de matemáticas en la segunda mitad del siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(3), pp. 379-392.
- MATEMÁTICAS 2º de ESO, LIbrosMareaVerde.tk, www.apuntesmareaverde.org.es
- MILLÁN VILLEGAS, M. D. Formalización del concepto de semejanza. Introducción a sus aplicaciones en problemas prácticos. Universidad de Granada
- SANCHEZ, V. Representaciones y comprensión en el profesor de matemáticas. Universidad de Sevilla
- http://sapmatematicas.blogspot.com.es/
- http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm
- http://revistasuma.es/
- http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarroyo/matematicas/materiales/4eso/geometria/homoteciasysemejanzas/homoteciasysemejanzas.htm
- http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/2esomatematicas/